

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

هندسه تحلیلی

سال چهارم

آموزش متوسطهٔ عمومی

ریاضی و فیزیک

۲۹۴

بسم الله الرحمن الرحیم

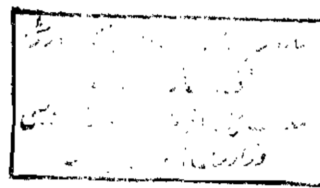
هندسه تحلیلی

سال چهارم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

۱۳۶۰



پدیدآورندگان

مؤلفان ● حسین غیور ● حسین مجذوب زنجانی ● محمدطاهر معیری
صفحه پرداز حسن فخارزاده
رسام خسرو مدیریان

چاپ از سازمان چاپ خواجه

دربارهٔ آرم جمهوری اسلامی ایران

از آنجا که این آرم باید محتوای حکومت اسلامی را بیان نماید و این محتویٰ چیزی نیست جز رشد و تکامل انسان به سوی " الله " (الی‌اللهالمصیر) و همین طور با توجه به این واقعیت که مابین محتوای کلام‌الهی و لحن و صوت و فرم ظاهری‌آن‌ارتباطی‌درونی وجود دارد و (شاید به همین دلیل به هنر خطاطی و ترتیل قرآن تا این حد در فرهنگ اسلامی‌توجه شده) ،کلمهٔ " الله " که هدف و غایت حکومت اسلامی و اساسا " غایت هستی است به‌عنوان مبنای فرم آرم انتخاب گردیده است و در جهت تکامل بخشیدن و تبدیل شکل این کلمه به صورت یک آرم و با مشخصات و امکاناتی که‌یک آرم از هر نظر باید دارا باشد سعی‌گردیده‌است که مفاهیم مورد نظر در نهایت خلوص، سادگی و ایجاز، در قالبی متناسب با محتویٰ بیان گردد آن‌هم بیانی استعاره‌گونه به‌جهت اینکه‌فرم آرم خود هویّت و شخصیّت مستقلی را ورای خط‌نوشته‌های معمولی دارا باشد. بر این اساس با تجزیه و خلاصه کردن شکل کلمه " الله" سعی گردیده تا علاوه بر اینکه کلمه " الله " از خلال فرم خوانده می‌شود عناصر آن طوری انتخاب‌گردد تا ترکیب آرم‌نیز خود چیزی بیشتر از یک خط‌نوشته بوده به طور رمزی مفاهیم‌و نشانه‌های‌یک حکومت اسلامی‌باشد. نشانه‌هایی‌که‌علاوه بر مبنای‌فکری حکومت (کتاب ــ ذکر) در قرآن از آنها به "میزان" و "حدید " تعبیر گردیده است . به این ترتیب اصلی‌ترین مفاهیمی را که باید در فرم مستتر باشند این‌طور می‌شود فهرست گردد :

" کتاب " (توحید ، اصول پایهٔ دین . . .) "میزان" (تعادل و توازن . . .) .
" حدید " (قدرت واستحکام . . . . . .) و "رشد " .

ویژگیهای اصلی ترکیب فرم عبارتند از :

ــ ترکیب و بیان‌فرم کلمهٔ " الله " یا پنج عنصرتشکیل دهنده اصلی که چهار عنصر آن به شکل‌هلالی انتخاب شده‌است در مجموع یادآور یک‌فرم گیاهی‌است . و بیانگر مفهوم (رشد) است .

لازم به‌توضیح است که شکل هلالی همان شکلی است که امضای مشهور حضرت محمد (ص) از آن تشکیل می شود .

ــ خطوط هادی این هلالی‌ها نصف‌النهارهای کرهٔ زمین را تجسم می‌بخشند و از این‌راه اشاره‌ای به جهانی‌بودن این عقیده دارند .

ـ پنج جزء اصلی آرم نشانهٔ پنج اصل پایهٔ اسلام (توحید ، نبوت ، عدل ، امامت ، معاد) است که اصل توحید در میان ، حکم عمود و ساقه اصلی را داراست (اصولا " عدد پنج در فرهنگ اسلامی شیعی جای خاصی دارد که علاوه بر اشاره به پنج اصل دین ، پنج تن و خود به عنوان یک عدد در هندسه و حساب مبنائی است برای اشکال و تناسبات طلائی که بخش مهمی را در هنر اسلامی تشکیل میدهد) .

ـ عناصر ترکیب به نحوی خلاصه شده‌اند ، تا ضمن بیان " الله" عصاره‌ای از کلمهٔ توحید یعنی " لااله‌الاالله " را نیز در خود مستتر داشته باشد .

(نحوهٔ تطوّر آرم در جهت بیان "لااله‌الاالله " در نموداری نشان داده شده است) .

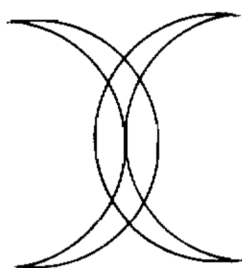
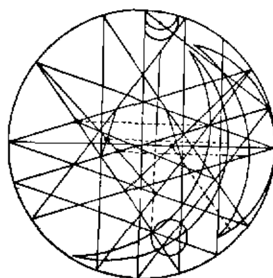
ـ جزء قائم میانی در ترکیب با فرم تشدید (ـّ) ضمن یادآوری شکل شمشیر خود به فرم قائم و ایستاده نمادی است از قدرت و استحکام و ایستادگی (حدید ـ آهن) .

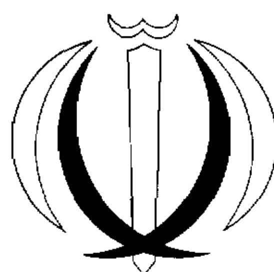
فرم تشدید (ـّ) که در خط عربی و فارسی شدّت را می‌رساند در اینجا نیز برای اشاره به فرم شمشیر و از این‌راه مفهوم " حدید " بکار گرفته شده است (انزلنا "الحدید" فیه بأس "شدید ") .

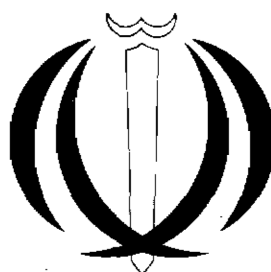
ـ ترکیب کاملا " متقارن شکل بیانی است از حالت تعادل و توازن (میزان) .

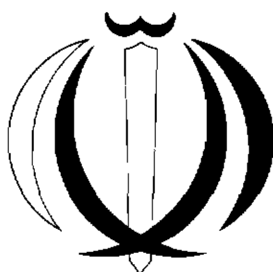
ـ بالاخره بزرگترین و اصلی‌ترین ویژگی ترکیب (ویژگی لازم و کافی) همانا بیان کلمهٔ "الله " است که خود هم قالب است و هم محتویٰ .

ـ نظام هندسی و طرز ترسیم آرم (که در یک دایره محاط است و نقاط راهنمای آن به کمک تقاطع دو ستارهٔ پنج پر به دست می‌آید) .







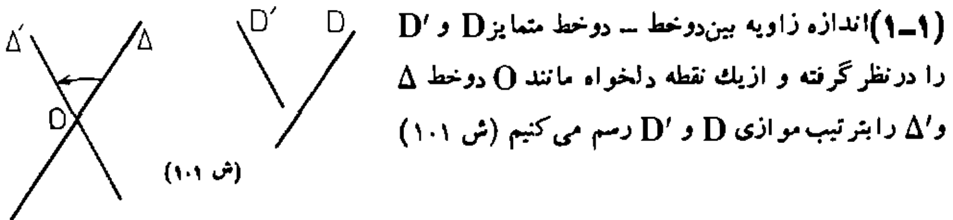


فهرست

فصل اول

نمایش نقطه و خط در صفحه و فضا

(۱ـ۱) اندازه زاویه بین‌دوخط ــ دوخط متمایز D و D' را درنظر گرفته و ازیك نقطه دلخواه مانند O دوخط Δ و Δ' را بترتیب موازی D و D' رسم می‌کنیم (ش ۱۰۱)

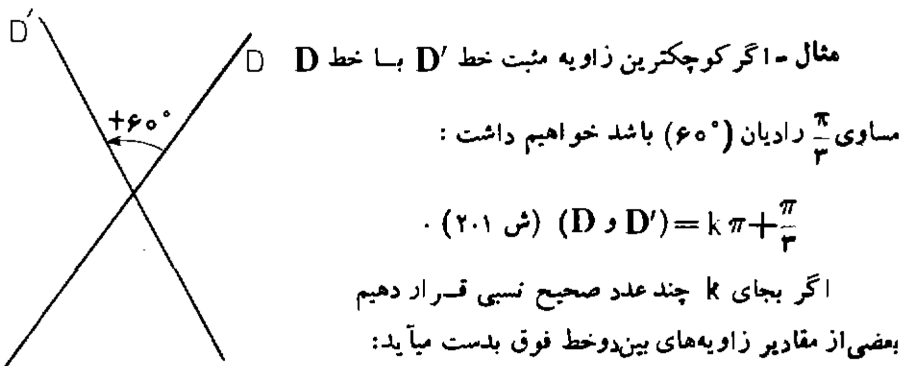


(ش ۱۰۱)

برحسب تعریف زاویه خط D' باخط D عددیست جبری که قدرمطلق آن، مقدار زاویه‌ای است که خط Δ با دوران باندازه آن حول نقطه O برخط Δ' منطبق میشود و علامتش $(+)$ است اگر Δ درجهت مثبت صفحه دوران کرده‌باشد و درغیر اینصورت علامتش $(-)$ است (جهت مثبت‌صفحه معمولا خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اختیار میشود). این عدد جبری رابا نماد $(D' \text{ و } D)$ نمایش میدهند.

کلیه اندازه‌های زاویه خط D' باخط D را می‌توان بصورت $k\pi+\theta$ نمایش داد که k عدد صحیح نسبی و θ نمایش کوچکترین مقدار مثبت زاویه $(D' \text{ و } D)$ است.

مثال ۱ـ اگر کوچکترین زاویه مثبت خط D' بـا خط D مساوی $\frac{\pi}{3}$ رادیان $(60°)$ باشد خواهیم داشت:



$$(D' \text{ و } D)=k\pi+\frac{\pi}{3} \quad \text{(ش ۲۰۱)}.$$

اگر بجای k چند عدد صحیح نسبی قـرار دهیم بعضی‌از مقادیر زاویه‌های بین‌دوخط فوق بدست میآید:

$$k=0 \Longrightarrow (D' \text{ و } D)=\frac{\pi}{3} \qquad k=1 \Longrightarrow (D' \text{ و } D)=\frac{4\pi}{3}$$

$$k=2 \Longrightarrow (D' \text{ و } D)=\frac{7\pi}{3} \qquad k=-1 \Longrightarrow (D' \text{ و } D)=-\frac{2\pi}{3} \text{ و } \ldots$$

روشن‌است که مقادیرزاویه $(D' \text{ و } D)$ بستگی به‌جای‌نقطه O ندارد ووقتی D و D' متقاطع باشند می‌توان نقطه تقاطع را نقطه O اختیار کرد تا از رسم کردن دوخط Δ و Δ' بی‌نیاز باشیم اگر دوخط D و D' متوازی باشند دوخط Δ و Δ' بریکدیگرمنطبق خواهند بود و زاویه θ دراین

حالت صفرمیشود و عبارت کلی زاویه (D و D′) بصورت $\boxed{k\pi}$ درمیآید :

$$D \parallel D' \Longrightarrow (D \text{ و } D') = k\pi$$

۱.۱. ۱ـ زاویـــه میان دوبـرداراـــ دوبـردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ درنظرمی گیریم. ازنقطه O بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ را به‌ترتیب برابر با $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ رسم می کنیم. هرزاویـــه (مثبت یا منفی یا صفر) که $\vec{OA}$ باید بچرخد تا بر $\vec{OB}$ منطبق‌شود زاویه $\vec{V}_2$ با $\vec{V}_1$ نامیده و اندازه‌آن بانماد $(\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2)$ نمایش داده میشود ازتعریف چنین برمی‌آید که :

$$(\vec{V}_1 , \vec{V}_2) \equiv -(\vec{V}_2 , \vec{V}_1)$$

کلیهٔاندازه‌های زاویه‌بردار $\vec{V}_2$ با بردار $\vec{V}_1$ بصورت $\boxed{2k\pi+\theta}$ نـمایش داده می‌شود که k عدد صحیح نسبی و θ کوچکترین مقدار زاویه $(\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2)$ است .

آن‌مقدار از $(\vec{V}_1 , \vec{V}_2)$که دربازهٔ $[\pi , \pi-]$ قرار دارد زاویه اصلی دوبـردار نامیده می‌شود .

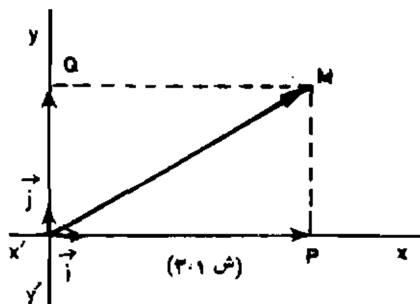
۱.۱. ۲ـ زاویه میان دومحـــورـــ زاویه میان دوبـردار یگانی دومحور را زاویهٔ میان آن دو محور می‌نامیم اندازهٔ زاویه محور y′oy بامحور x′ox رابانماد (ox ، oy) نمایش می‌دهیم.

زاویه میان‌یك بردار ویك‌محور نیزهمان زاویه میان‌آن‌بردار وبرداریگانی محورمی‌باشد.

(۱ـ۲)ـ نمایش نقاط واقع بریك صفحه

۱. ۲. ۱ـ مؤلفه‌های یك بردار

هرگاه $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بردارهای واحد دو محور x′ox و y′oy از دستگاه مختصات و x و y مختصات نقطهٔ M ازصفحهٔ این‌دومحور باشند، شکل ۱.۳ ، از تساوی $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{OQ}$ بـا ملاحظهٔآنکه $\overline{OP} = x$ و $\overline{OQ} = y$ وبنابراین $\vec{OP} = x \cdot \vec{i}$ و $\vec{OQ} = y \cdot \vec{j}$ می‌توان نتیجه گرفت:



(ش ۱.۳)

$$\overrightarrow{OM}=x\cdot\overrightarrow{i}+y\cdot\overrightarrow{j}$$

معمولا $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ را مؤلفه‌های $\overrightarrow{OM}$ بر دو محور و x و y را مختصات آن بردار برمحورهای مزبور می‌نامیم.

مختصات بردار

می‌دانیم تصویرهر بردار بریک محور یک بردار است ودو بردار برابر تصویرهای برابر دارند بنابراین اگر بردار دلخواه $\overrightarrow{V}$ داده شده باشد و بردار $\overrightarrow{OM}$ با $\overrightarrow{V}$ برابر باشد اندازه‌های جبری تصویرهای $\overrightarrow{V}$ و $\overrightarrow{OM}$ برهریک از محورها باهم برابرند.

اگر $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_2 , y_2)$ درصفحه‌مختصات داده شده باشند آنگاه X و Y مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ از دستورهای زیر بدست می‌آیند.

$$X=x_2-x_1 \quad \text{و} \quad Y=y_2-y_1$$

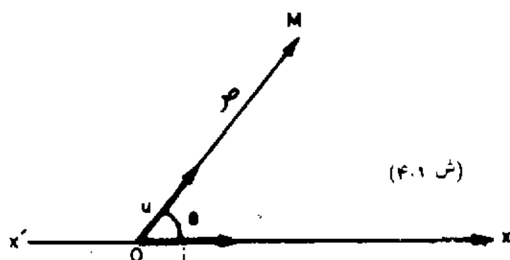
(برای بدست‌آوردن این دستورهارابطه $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ را روی هریک از محورها تصویر کنید).

هربردار $\overrightarrow{V}$ با مختصات‌آن به‌صورتهای $\overrightarrow{V}(a , b)$ و یا $\overrightarrow{V}\left|\begin{matrix}a\\b\end{matrix}\right.$ نمایش داده‌می‌شود.

مثال - نقطه‌های $A(0 , 1)$ و $B(2 , 3)$ داده شده‌اند. بردار $\overrightarrow{AB}$ را بانماد $\overrightarrow{AB}(2,2)$ نمایش می‌دهیم.

۲.۲.۱ - مختصات قطبی نقطه - دیدیم که هرگاه نقطه‌ای ازصفحه به‌عنوان مبدأمقایسه (نقطهٔ O) و محوری مانند $x'Ox$ گذرنده از آن مبدأ و محور دیگری مانند $y'Oy$ را بـه عنوان دستگاه مقایسه اختیارکنیم، هر نقطهٔ M واقع در صفحه، از نظر هندسی با $\overrightarrow{OM}$ مشخص خواهد شد و در نمایش نقاط صفحه به وسیلهٔ‌مختصات، $\overrightarrow{OM}$ را با مـؤلفه‌های آن بـر دو محور مشخص می‌کنیم.

اگر $\overrightarrow{OM}$ صفر نباشد می‌توان‌آن را با اندازه‌آن و اندازهٔ زاویه‌ای که بـا محور $x'Ox$ تشکیل می‌دهد مشخص کرد (شکل ۴.۱) در این صورت هـر نقطهٔ M از صفحه با $|\overrightarrow{OM}|$ و زاویـه $\theta=(\overrightarrow{i} , \overrightarrow{OM})$ مشخص می‌شود. دراین‌حالت



(ش ۴.۱)

عدد $|\overrightarrow{OM}|$ را با نماد ρ نمایش می‌دهیم.

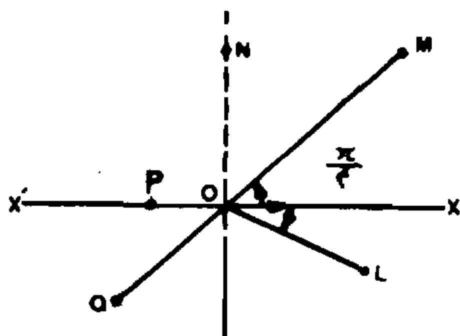
در حالتی که M بر O منطبق باشد زاویه θ بی معنی ولی نقطه O با شرط $\rho=0$ کاملا مشخص است.

بنابراین بجز مبدأ هرنقطهٔ دیگراز صفحه بادو عامل ρ و θ مشخص می‌شود. عددهای ρ و θ را مختصات قطبی آن نقطه می‌نامند عدد ρ همواره نامنفی است ولی θ هرعدد حقیقی می‌تواند باشد،

در این دستگاه، نقطهٔ O را قطب ومحور $x'Ox$ را محور قطبی و OM را شعاع قطبی و زاویه θ را نیمدار نقطه M می گوئیم.

باید توجه داشت که در مختصات قطبی، زاویهٔ θ زاویه‌ای مثبت یامنفی یا مساوی‌باصفراست و اندازهٔ زاویه‌ای است که نیم خط Ox باید به‌اندازهٔ آن گرد قطب بچرخد تا نقطه با مختصات ρ و θ روی‌آن قرار گیرد.

در مختصات قطبی هر نقطهٔ M با مختصات ρ و θ را به‌صورت $M(\rho , \theta)$ نمایش می‌دهیم و هرجفت اعداد ρ و θ فقط یك نقطه را مشخص می کنند، اما نظیر هر نقطه مفروض چند جفت مانند ρ و θ می‌توان درنظر گرفت. زیرا هر نقطهٔ $M(\rho , \theta)$ را با مختصات ρ و $\theta+2\pi$، یا ρ و $\theta+4\pi$ و ... نیزمی‌توان نمایش داد (شکل ۱ـ ۵).

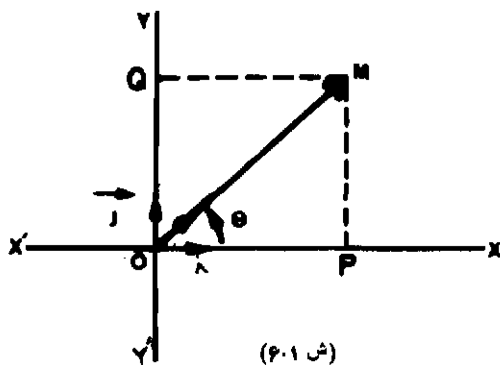


(ش ۱ـ۵)

بنا براین :

$M(\rho ,\theta)=M(\rho,\theta+2k\pi)$. در شکل (۱ـ ۵) هریك از نقاط $M(3,\frac{\pi}{4})$، $N(2,\frac{\pi}{2})$، $P(1,\pi)$، $L(2,-\frac{\pi}{6})$ و $Q(2,\frac{5\pi}{4})$ بامختصات قطبی مشخص شده است.

رابطه بین مختصات قطبی و قائم - نقطه $M(x , y)$ را در دستگاه مختصات قائم xOy اختیار می کنیم (شکل ۱ـ ۶). دستگاه قطبی را چنان در نظر می گیریم که نقطهٔ O قطب و محور $x'ox$ محور قطبی‌آن باشد. اگر مختصات نقطهٔ M را نسبت به این دستگاه ρ و θ درنظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که :



(ش ۱ـ۶)

$$\overline{OP}=|\overrightarrow{OM}|\cos(\overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{OM})=|\overrightarrow{OM}|\cos\theta=\rho\cos\theta$$

$$\overline{OQ}=|\overrightarrow{OM}|\cos(\overrightarrow{j}\ ,\ \overrightarrow{OM})=|\overrightarrow{OM}|\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\rho\sin\theta$$

اما $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ مختصات قائم نقطهٔ M نسبت بهدستگاه xoy می‌باشند، وبنا براین: هر گاه محور قطبی برمحور طولها از دستگاه مختصات قائم منطبق باشدو محورهای مقایسه را دریك جهت و با مبدأ مشترك در نظر بگیریم بین مختصات قائم وقطبی هر نقطه رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

مثال ــ اگر در دستگاه مختصات قطبی نقطهٔ$(۴ ، \frac{\pi}{۶})$ M را داشته باشیم، نسبت بهدستگاه مختصات قائمی که محور طولهای آن‌همان محور قطبی باشد، مختصات نقطهٔ M عبارتند از:

$$x=۴\cos\frac{\pi}{۶}=۲\sqrt{۳}$$

$$y=۴\sin\frac{\pi}{۶}=۲$$

۳.۲.۱ ـ فاصله دو نقطه

فاصله دو نقطه برحسب مختصات قائم آنها ـ یادآوری می‌کنیم که اگر دو نقطهٔ $A(x_۱ ، y_۱)$ و $B(x_۲ ، y_۲)$ در یك صفحهٔ مختصات قائم مفروض باشند فاصلهٔ آنها از دستور زیر بدستمی‌آید:

$$(۱)\quad AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

فاصلهٔ هر نقطهٔ $M(x ، y)$ از مبدأ مختصات با استفاده از دستور زیر تعیین می‌شود:

$$OM=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

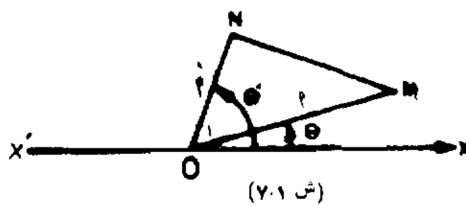
مثال ـ فاصلهٔ نقطهٔ $M(۲۴ ، ۷)$ از مبدأ مختصات

$$OM=\sqrt{۲۴^۲+۷^۲}=\sqrt{۶۲۵}=۲۵$$

و فاصله همان نقطه از نقطه$(۱۲ ، ۲)$ N

$$MN=\sqrt{(۲۴-۱۲)^۲+(۷-۲)^۲}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

فاصلهٔ دونقطه برحسب مختصات قطبی آنها ـ اگر دو نقطهٔ $M(\rho , \theta)$ و $N(\rho' , \theta')$ دریک صفحهٔ مختصات قطبی مفروض باشند (شکل ۱ . ۷)



(ش ۷.۱)

درمثلث OMN اضلاع $OM = \rho$ و $ON = \rho'$ و زاویهٔ $N\hat{O}M = \theta' - \theta$ مشخص هستند و بنابراین MN، ضلع سوم این مثلث را می‌توان حساب کرد .

یعنی

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cos \hat{O}_1$$

و ازآنجا :

$$(2) \quad MN = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\theta - \theta')}$$

بصورت دیگر می‌توان دید که اگر در دستور (۱) بجای x و y اندازه‌های آنها را برحسب مختصات قطبی قراردهیم، فاصلهٔ دونقطه برحسب مختصات قطبی آنها مشخص می‌شود.

روشن است که فاصلهٔ هر نقطهٔ $M (\rho , \theta)$ ازقطب مساوی ρ است.

مثال ۱- فاصلهٔ دو نقطهٔ $A (8 , \frac{3\pi}{4})$ و $B (3 , \frac{5\pi}{12})$ درمختصات قطبی را بصورت زیر تعیین می کنیم :

$$AB = \sqrt{64 + 9 - 2 \times 8 \times 3\cos(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{12})}$$

$$= \sqrt{73 - 48\cos\frac{\pi}{3}} = \sqrt{73 - 24} = \sqrt{49} = 7$$

مثال ۲ - فاصلهٔ دونقطهٔ $M (3 , \frac{\pi}{3})$ و $N (4 , \frac{5\pi}{6})$ درمختصات قطبی بصورت زیر تعیین می‌شود :

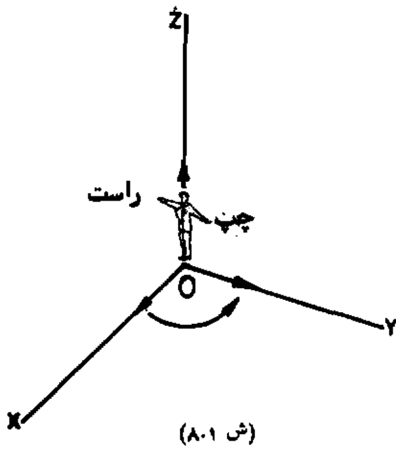
$$MN = \sqrt{9 + 16 - 2 \times 3 \times 4\cos\frac{\pi}{2}} = \sqrt{25} = 5$$

(۱-۳)ـ نمایش نقاط واقع درفضا

۱.۳.۱ـ دستگاه مختصات فضائی ـ هرسه نیم خط غیر واقع دریك صفحه که مبدأ مشترك داشته باشند یك کنج سه‌وجهی مشخص می کنند، مانند کنج (Ox , Oy , Oz) یا (Ox , Oz , Oy)

و ... درشکل ۱۰۸ .

کنج سه‌وجهی ممکن است جهت‌دار فرض شود و آن درصورتی است که برای یالهای کنج ترتیب خاص اختیارشده باشد. جهت یك کنج سه‌وجهی $(Ox ، Oy ، Oz)$ را مستقیم می‌گوئیم درصورتی که اگر ناظری برصفحهٔ xOy به‌ترتیبی ایستاده باشد که امتداد قامتش مطابق شکل (۱۰۸) درامتداد جهت مثبت محور Oz قرارگرفته و رو بەرو به‌محور Ox باشد، زاویهٔ $(Ox ، Oy)$ را درجهت مثبت ببیند، یعنی محور Oy درسمت چپ وی قرارداشته باشد. بااین تعریف، جهت کنج سه‌وجهی $(Ox ، Oz ، Oy)$ معکوس نامیده می‌شود.



(ش ۱۰۸)

هرگاه کنج $(Ox ، Oy ، Oz)$ جهت‌دار فرض‌شده باشد، رعایت ترتیب درخواندن یالها الزامی است و درهرصورت ترتیب نوشتن یالها راچنان باید درنظر بگیریم که جهت کنج محفوظ باشد. هر کنج سه وجهی جهت‌دار راازنظر سهولت نوشتن و خواندن، باحروف رأس کنج و یك نقطه‌از هریال‌آن بارعایت‌ترتیب مشخص می کنیم مانندکنج $O.xyz$.

برای نمایش نقاط فضائی با اعداد، کنج سه‌وجهی جهت‌دار $O.xyz$ را به‌عنوان دستگاه مقایسه درنظر گرفته وآنرا دستگاه مختصات فضائی می‌نامیم. دستگاه مختصات فضائی معمولا کنج سه‌وجهی درجهت مستقیم اختیار می‌شود (شکل ۱۰۸)

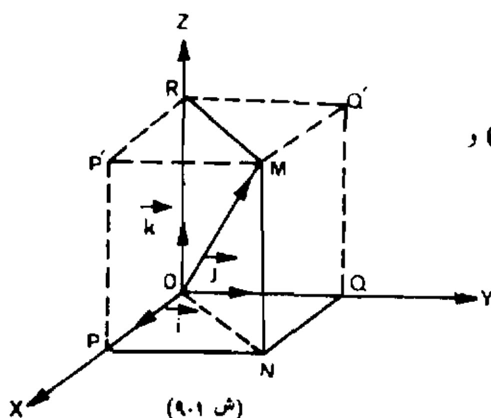
دردستگاه مختصات فضایی ممکن‌است زاویه‌های کنج غیر مشخص باشند، اما عموماً ازکنج سه‌قائمه، که محورهای‌آن دوبه‌دو بریکدیگر عمودند استفاده می‌شود.

اندازه‌های بردارهای واحد سه‌محور دستگاه مختصات فضائی لزوماً نباید متساوی باشند، اما درعمل بیشترازدستگاه مختصاتی استفاده می‌شودکه اندازه‌های بردارهای واحد سه‌محور آن مساوی یکدیگرند.

درسرتاسرکتاب محورهای مختصات را عمود بریکدیگر فرض می کنیم.

۲.۳.۱ـ مختصات نقطه درفضا

مؤلفه‌های یك‌بردار ـ اگردستگاه مختصات فضائی $O.xyz$ و $\overrightarrow{OM}$ به‌مبدأ O را درنظر گرفته و نقاط N و R تصویرهای قائم نقطهٔ M را برصفحهٔ xOy و بر محور Oz تعیین کنیم، شکل (۹۰۱)



(ش ۹۰۱)

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OR}$$

و اگر تصویرهای نقطهٔ N را بردومحور Ox و Oy به‌ترتیب با P و Q نمایش دهیم :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$$

و بنابراین می‌توان نوشت :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

بردارهای $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OQ}$ و $\overrightarrow{OR}$ راکه‌سه‌تصویر $\overrightarrow{OM}$ برسه محور مختصات هستند و $\overrightarrow{OM}$ رامشخص می‌کنند، مؤلفه‌های $\overrightarrow{OM}$ برسه محورمختصات می گوئیم.

اما نقاطP و Qبه‌ترتیب‌تصویرهای قائم‌نقطهٔ M بردومحور Ox و Oy خواهندبود (چرا؟). بنابراین دردستگاه مختصات قائم مؤلفه‌های هر بردار به‌آغاز O بدینطریق مشخص می‌شوند که تصویرهای قائم نقطهٔ M (پایان‌آن بردار) را برسه‌محور تعیین‌کنیم . یعنی:

مؤلفه‌های هر بردار $\overrightarrow{OM}$ برسه‌محور یك‌دستگاه مختصات‌قائم، ازتصویرهای قائم آن‌بردار برسه‌محور مختصات پدید می‌آیند. ازطریق تعیین تصویرهای نقطهٔ M برسه‌محورمختصات، $\overrightarrow{OM}$ به‌سه‌بردار، که هریك درامتداد یکی‌ازمحورها است، تجزیه می‌شود .

هرگاه $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ و $\overline{OR}$ اندازه‌های جبری تصویرهای‌قائم$\overrightarrow{OM}$را بر سه‌محور دستگاه مختصات قائم با اعداد حقیقی x و y و z نمایش دهیم و $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد سه محور دستگاه مختصات باشند (شکل ۹۰۱)، $\overrightarrow{OP}=x\cdot\vec{i}$ و $\overrightarrow{OQ}=y\cdot\vec{j}$ و $\overrightarrow{OR}=z\cdot\vec{k}$

و بنابراین

$$\overrightarrow{OM}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$$

یعنی : باهربردار مفروض $\overrightarrow{OM}$ یا هرنقطهٔ M از فضای سه بعدی، سه عدد حقیقی x و y و z متناظر است که در رابطهٔ فوق صدق می‌کنند و به‌عکس هر سه عدد حقیقی‌مفروض یك نقطه، و فقط یك نقطهٔ M از فضا مشخص می‌کنند چنانکه‌آن اعداد اندازه‌های جبری‌مؤلفه‌های$\overrightarrow{OM}$برسه‌محور مختصات می‌باشند.

سه عدد x و y و z را مختصات فضایی نقطه M می‌نامیم ودر هندسهٔ تحلیلی‌هر نقطهٔ فضا را در مقایسه با یك دستگاه مختصات، با مختصات آن مشخص می‌کنیم.

سه عدد x و y و z را، که در دستگاه مختصات قائم‌ازجهت قدر مطلق بافاصله‌های نقطهٔ M از سه‌صفحهٔ مختصات برابرند، به‌ترتیب طول وعرض وارتفاع نقطهٔ M می‌گوئیم.

روشن است‌که مختصات هرنقطه برحسب‌آنکه‌آن نقطه درکدام یك ازنواحی‌هشتگانهٔ‌حاصل از صفحه‌های مختصات سه‌بعدی واقع باشد، مثبت یا منفی هستند واگر نقطه‌ای‌بریکی ازصفحه‌های xOy یا yOz یا zOx، یا بریك محور واقع باشد، یکی از مختصات‌آن یا دوعامل ازسه عامل مزبور، صفر خواهد بود. مبدأ مشترك‌سه محور راعنوان مبدأ مختصات. تنها نقطه‌ای‌است که‌مختصات آن هرسه مساوی باصفرند.

به همان‌ترتیب که در موردنقاط واقع در یك‌صفحهٔ xoy مقرر است، هر نقطه فضایی Mراکه مختصات‌آن نسبت به دستگاه مختصات $O.xyz$ به‌ترتیب x و y و z باشند به یکی ازدوصورت $M\,(x,\ y,\ z)$ یا $M\left|\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right.$ نمایش می‌دهیم و این نمادها را «نقطهٔ M به مختصات x و y و z» می‌خوانیم.

۴.۳.۱- مختصات بردار ـ در فضا هم برای هر بردارمی‌توان مؤلفه‌های‌آن رابرسه محورمختصات تعریف‌کرد. تصویرهای یك بردار را برسه محور مختصات، مؤلفه‌های آن بردارواندازه‌های‌جبری مؤلفه‌ها را، مختصات‌آن‌بردار می گوئیم. اگر دو نقطه $A\,(x_1 \text{ و } y_1 \text{ و } z_1)$ و $B\,(x_2 \text{ و } y_2 \text{ و } z_2)$ داده شده‌باشند. مختصات‌بردار $\overline{AB}$ ازدستورهای زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{cases} X = x_2 - x_1 \\ Y = y_2 - y_1 \\ Z = z_2 - z_1 \end{cases}$$

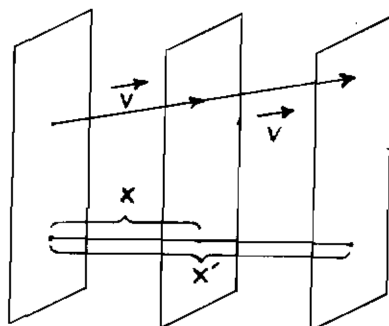
و می‌توان نوشت : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{X}i + \overrightarrow{Y}j + \overrightarrow{Z}k$.

۴.۳.۱ - ضرب عدد در بردار ـ سال گذشته دیدیم که اگر a یك عدد حقیقی و $\overrightarrow{V}$ یك بردار

باشد، حاصلضرب عدد a در بردار $\vec{V}$ برداری مانند $\vec{W}$ است که اندازه‌اش برابر با $|a||\vec{V}|$ می‌باشد و چنانچه a و $\vec{V}$ هیچکدام صفر نباشند آنگاه راستاهای $\vec{V}$ و $\vec{W}$ یکی هستند. وانگهی اگر a مثبت باشد، $\vec{V}$ و $\vec{W}$ هم‌جهت هستند و اگر a منفی باشد، $\vec{V}$ و $\vec{W}$ دردوجهت مخالفند. اگر X و Y و Z مختصات بردار $\vec{V}$ و X' و Y' و Z' مختصات بردار $\vec{W}$ باشند، رابطه‌های زیر برقرارند:

$$\left.\begin{array}{l} X'=aX \\ Y'=aY \\ Z'=aZ \end{array}\right| \Leftrightarrow \vec{W}=a\vec{V} \Leftrightarrow \vec{W} \parallel \vec{V}$$

(قراردادمی‌کنیم که $\vec{O}$ با هر برداری موازی است) برای اثبات دستورهای بالا (مثلا برابری $X'=aX$) به‌شکل (۱۰۰۱) نگاه کنید



(ش ۱۰۰۱)

از راه تحلیلی نیز می‌توان دستورهای بالا را اثبات کرد. درسال گذشته دیدیم که:

$$a(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=a\vec{V}_1+a\vec{V}_2 \text{ و } a(b\vec{V})=ab\vec{V}$$

بنابراین اگر $\vec{V}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$ باشد، آنگاه

$$\vec{W}=a\vec{V}=aX\vec{i}+aY\vec{j}+aZ\vec{k}$$

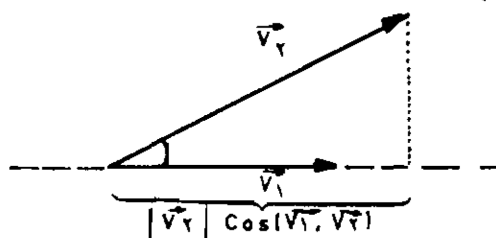
یعنی مختصات بردار $\vec{W}$ عبارتند از aX و aY و aZ.

(۴-۱) - ضرب بردارها

۱ . ۴ . ۱- ضرب درونی دو بردار - حاصل‌ضرب درونی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ بنا بـه‌تعریف عـدد جبری $|\vec{V}_1|\cdot|\vec{V}_2|\cos(\vec{V}_1 , \vec{V}_2)$ می‌باشند که آنرا با نماد $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ نمایش میدهیم :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|\cdot|\vec{V}_2|\cos(\vec{V}_1 , \vec{V}_2)$$

چون $|\vec{V}_2| \cos(\vec{V}_1 , \vec{V}_2)$ اندازه‌جبری‌تصویر بردار $\vec{V}_2$ برروی امتداد $\vec{V}_1$ می‌باشد ، پس می‌توان گفت که حاصلضرب درونی دو بردار برابر است با حاصلضرب اندازهٔ یك برداردراندازه جبری تصویر بردار دیگر برآن بردار . (امتداد $\vec{V}_1$ را محوری فرض می‌کنیم که جهت مثبت آن همان‌جهت $\vec{V}_1$ می‌باشد .)



(ش ۱۱۰۱)

این موضوع دراثبات برخی‌از ویژگیهای ضرب‌درونی مورداستفاده است.

ویژگیهای ضرب درونی بردارها :

(الف) اگر دوبردار برهم عمود باشند ویا اینکه اندازه یکی از بردارها صفرباشد،آنگاه حاصلضرب درونی‌آنها صفر است و بعکس.

(ب) برای‌هرعدد a وهر دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ داریم:

$$a(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) = (a\vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \cdot (a\vec{V}_2)$$

یعنی اگر یکی از دوبردار را در عددی ضرب‌کنیم، حاصلضرب درونی بردارها نیزدر آن عدد ضرب می‌شود (باکشیدن شکل این موضوع را نشان دهید).

(پ) ضرب درونی دارای ویژگی جابه جایی است، یعنی همواره:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1 \quad \text{(چرا ؟)}$$

(توجه‌کنید که $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$.)

(ت) ضرب درونی نسبت به عمل جمع بردارها دارای ویژگی پخش پذیری است، یعنی:

$$\vec{V}\cdot(\vec{V}_1+\vec{V}_2)=\vec{V}\cdot\vec{V}_1+\vec{V}\cdot\vec{V}_2 \quad \text{(چرا؟)}$$

(ث) برای هر بردار $\vec{V}$ داریم : $\vec{V}\cdot\vec{V}=|\vec{V}|^2$.

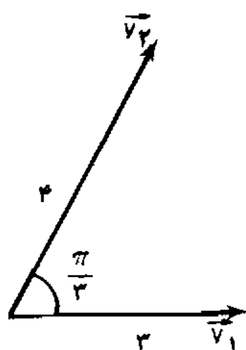
(ج) اگر زاویه میان دو بردار حاده باشد، حاصلضرب درونی آنها مثبت، و اگر زاویه منفرجه باشد، حاصلضرب درونی بردارها منفی خواهد بود.

مثال ــ در شکل (۱۲.۱) :

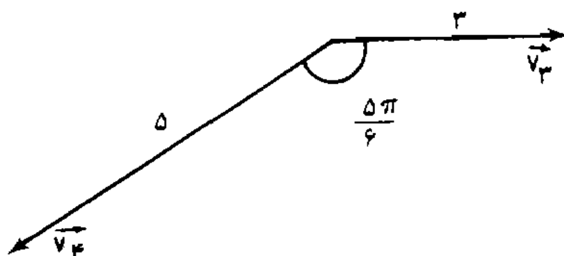
$$\vec{V}_1\cdot\vec{V}_2=(3)(4)\cos\frac{\pi}{3}=6$$

مثال ــ در شکل (۱۳.۱) :

$$\vec{V}_3\cdot\vec{V}_4=(3)(5)\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{15\sqrt{3}}{2}$$



(ش ۱۲.۱)



(ش ۱۳.۱)

نامهای دیگر برای ضرب درونی ــ ضرب درونی را گاهی ضرب عددی یا ضرب نقطه‌ای نیز مینامند. «ضرب عددی» بخاطر اینست که حاصلضرب یک عدد می‌شود و «ضرب نقطه‌ای» نیز بخاطر نماد $\vec{V}\cdot\vec{W}$ می‌باشد.

حاصل ضرب درونی دو بردار برحسب مختصات آنها ــ هر گاه در دستگاه مختصات $O\cdot xyz$ دو بردار $\vec{V}_1(X_1, Y_1, Z_1)$ و $\vec{V}_2(X_2, Y_2, Z_2)$ را داشته باشیم،

$$\vec{V}_1=X_1\vec{i}+Y_1\vec{j}+Z_1\vec{k}$$
$$\vec{V}_2=X_2\vec{i}+Y_2\vec{j}+Z_2\vec{k}$$

و بنابراین :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (X_1\vec{i} + Y_1\vec{j} + Z_1\vec{k}) \cdot (X_2\vec{i} + Y_2\vec{j} + Z_2\vec{k})$$

اما محورهای مختصات دو به دو بر یکدیگر عمودند و بنابراین حاصل ضربهای درونی دو به دو بردارهای $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ مساوی صفرنــد و از طرفی $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \times 1 \times \cos 0 = 1$ و به همین دلیل $\vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ و $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ بنابراین :

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}$$

اندازهٔ یك بردار برحسب تصویرهای آن ــ از دستور بالا می‌توان دیدکه اگر $\vec{V}(X, Y, Z)$ باشد :

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = X^2 + Y^2 + Z^2$$

از طرفی بنا به ویژگی (ث)

$$\vec{V} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2$$

و در نتیجه

$$\boxed{|\vec{V}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

فاصله دو نقطه ـ دیدیم که اگر دو نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ مفروض باشند، تصویرهای قائم $\overrightarrow{AB}$ بر محورهای مختصات قائم $O \cdot xyz$ به ترتیب $x_2 - x_1$ و $y_2 - y_1$ و $z_2 - z_1$ است و بنابراین فاصلهٔ دو نقطه A و B را از دستور زیر می‌توان بدست آورد:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

فاصلهٔ هر نقطهٔ $M(x, y, z)$ از مبدأ مختصات از دستور زیر بدست می‌آید:

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ضرب برونی دو بردار ـ حاصل‌ضرب برونی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ برداری است مانند $\vec{V}$ بقسمی که : شکل (۱۴۰۱)

الف ــ امتداد آن عمود برصفحه موازی دو بردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ است.

ب ــ جهتش طوری است کــه کنج $(\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ و $\vec{V})$ مستقیم باشد.

ج ــ اندازه‌اش مساوی $|\vec{V}_1| \cdot |\vec{V}_2| |\sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)|$ است.

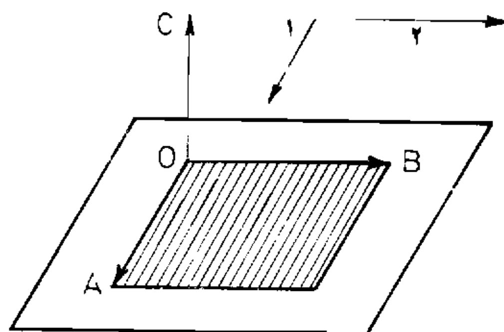
حاصل‌ضرب خارجی دو بردار را حاصل‌ضرب برداری دو بردار نیز نامیده با یکی از نمادهای

$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ یا $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ نمایش میدهیم $\boxed{\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}}$

با توجه به‌قسمت (ج) می‌توان گفت اندازه حاصل‌ضرب برونی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ مساوی عدد مساحت متوازی‌الاضلاعی است که روی‌این دو بردار بنامیشود.

برای نمایش حاصل‌ضرب برونی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ ازنقطه‌اختیاری O بردارهای $\vec{OA}$ و $\vec{OB}$ رابترتیب مساوی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ رسم می‌کنیم آنگاه از نقطه O خطی عمود بر صفحه AOB رسم می‌نمائیم و روی این‌خط بردار $\vec{OC}$ را چنان اختیارمی‌کنیم که‌کنج $(O - ABC)$ یك‌کنج مستقیم و اندازه بردار $\vec{OC}$ مساوی $|\vec{V}_1| \; |\vec{V}_2| \; \sin(\vec{V}_1 \text{ و } \vec{V}_2)$ باشد

بردار $\vec{OC}$ که بدین‌ترتیب بدست میآید وآنرا $\vec{Vc}$ نمایش میدهیم حاصل ضرب برونی دوبردار $\vec{V}_1$ و $\vec{V}_2$ می‌باشد (شکل ۱۴.۱)



(ش ۱۴.۱)

ویژگیهای ضرب برونی دو بردار ـ ثابت می‌شود که‌حاصل ضرب‌برونی بردارهادارای‌ویژگیهای زیر است :

حاصل ضرب برونی دو بردار در حالتی‌که همراستایند و یا اندازهٔ اقلاً یکی از آنها **مساوی صفر می‌باشد، مساوی صفر است. بعکس اگر حاصل ضرب برونی دو بردار مساوی‌صفر باشد، دوبردار یا همراستا هستند و یا اقلا اندازهٔ یکی ازآنها صفر است. یعنی:**

$$(\vec{V}_1 = \vec{0} \text{ یا } \vec{V}_2 = \vec{0} \text{ یا } \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2) \Longleftrightarrow \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0}$$

ـضرب یك عدد در حاصل ضرب برونی دو بردار دارای خاصیت زیر است:

$$(a\vec{V}_1) \wedge \vec{V}_2 = \vec{V}_1 \wedge a(\vec{V}_2) = a(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \quad (\text{a هر عددحقیقی})$$

حاصل ضرب برونی دو بردار دارای خاصیت جابجائی نیست، زیرا که :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = -\vec{V_2} \wedge \vec{V_1} \qquad \text{(چرا؟)}$$

ـ ضرب برونی بردارها بر عمل جمع پخش پذیر است. یعنی:

$$\vec{V_1} \wedge (\vec{V_2} + \vec{V_3}) = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2} + \vec{V_1} \wedge \vec{V_3}$$

حاصل ضرب برونی دو بردار برحسب تصویرهای آنها ـ در دستگاه مختصات قائم O . xyz بردارهای $\vec{V_1}\,(X_1 , Y_1 , Z_1)$ و $\vec{V_2}\,(X_2 , Y_2 , Z_2)$ را در نظر می گیریم؛ دراین صورت

$$\vec{V_1} = X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}$$

$$\vec{V_2} = X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k} \quad \text{و}$$

و بنابراین :

$$\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = (X_1 \vec{i} + Y_1 \vec{j} + Z_1 \vec{k}) \wedge (X_2 \vec{i} + Y_2 \vec{j} + Z_2 \vec{k})$$

$$= X_1 X_2 \vec{i} \wedge \vec{i} + Y_1 Y_2 \vec{j} \wedge \vec{j} + Z_1 Z_2 \vec{k} \wedge \vec{k}$$

$$+ X_1 Y_2 \vec{i} \wedge \vec{j} + Y_1 X_2 \vec{j} \wedge \vec{i} + X_1 Z_2 \vec{i} \wedge \vec{k}$$

$$+ Z_1 X_2 \vec{k} \wedge \vec{i} + Y_1 Z_2 \vec{j} \wedge \vec{k} + Z_1 Y_2 \vec{k} \wedge \vec{j}$$

اما به موجب تعریف ضرب برونی بردارها

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = -\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{k} \quad \text{و}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{k} = -\vec{k} \wedge \vec{j} = \vec{i} \quad \text{و}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{i} = -\vec{i} \wedge \vec{k} = \vec{j} \quad \text{و} \qquad \text{(چرا؟)}$$

بنا بر این می توان نوشت :

$$\boxed{\vec{V_1} \wedge \vec{V_2} = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2)\vec{i} + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2)\vec{j} + (X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\vec{k}}$$

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که تصویرهای حاصل‌ضرب برونی دو بردار مفروض برمحورهای قائم مختصات عبارتند از :

$$\begin{vmatrix} X' = Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Y' = Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ Z' = X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{vmatrix}$$

نتیجهٔ ۱ــ اندازهٔ حاصل ضرب برونی دو بردار را بــرحسب تصویرهای آن بردارها بــه صورت زیر می‌توان تعیین‌کرد :

$$\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 \Longrightarrow$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2)^2 + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2)^2 + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2)^2}$$

(۱ــ۵)ــ نمایش تحلیلی‌شکل هندسی ـ معادلهٔ منحنی (خم)

۱.۵.۱ــ تعریف. در هندسه تحلیلی‌قضیه‌ها و گزاره‌های هندسی را با استفاده ازاصول‌محاسبه ثابت می‌کنیم: این روش ایجاب می‌کندکه شکلهای هندسی رابا عوامل عددی مشخص‌کنیم. چنانکه با استفاده ازمختصات، نقطه‌ها رابااعداد حقیقی نمایش می‌دهیم. به‌همین منظور هرشکل هندسی را بارابطه‌ای که بین‌مختصات هرنقطهٔآن برقراراست مشخص می‌کنیم. رابطهٔ بین‌مختصات هرنقطهٔیك شکل هندسی معادلهٔآن شکل نامیده می‌شود.

می‌دانیم‌که هرشکل هندسی مجموعه‌ای از نقاط است‌که باویژگیهای معین تعریف می‌شود، بااستفاده از ویژگیهای شکل هندسی می‌توان رابطه‌ای درنظر گرفت‌که بین‌مختصات (قائم یا قطبی) هرنقطهٔآن شکل برقرار باشد. دراینصورت شکل هندسی بایك رابطه مشخص شده است‌که آنرا معادلهٔآن شکل می‌گوئیم .

معادلهٔ شکل‌هندسی ممکن‌است به‌صورت $f(x, y) = 0$ یا $y = f(x)$ رابطهٔ بین‌مختصات قائم هرنقطهٔ آن شکل را بیان‌کند و دراین‌صورت آنرامعادلهٔ شکل دردستگاه قائم (معادله دکارتی‌ـ شکل) می‌گوئیم. نیزممکن است معادلهٔ شکل برحسب ρ و θ مختصات هرنقطهٔ آن دردستگاه قطبی باشدکه دراین‌حالت آنرا معادلهٔ شکل دردستگاه قطبی می‌گوئیم .

معادلهٔ هرشکل‌هندسی درحقیقت شرایطی رابیان می‌کندکه بین‌مختصات یك‌نقطه باید برقرار باشد تاآن نقطه برشکل مفروض واقع باشد و بعکس. یعنی‌معادلهٔ هرشکل هندسی C شرایط لازم و کافی را برای آن‌که نقطهٔ $M(x, y)$ بــر شکل C واقع بــاشد برحسب مختصات آن نقطه بیان می‌کند .

دربسیاری موارد مختصات نقطه‌را برحسب یك‌متغیر t و به‌صورت :

$$\begin{cases} x=g(t) \\ y=h(t) \end{cases}$$

مشخص می‌کنیم. روشن است‌که دراینصورت به‌ازای هرمقدار t یك‌جفت اعداد x و y ازدوتساوی اخیر به‌دست می‌آید‌که توأماً نقطه‌ای ازصفحهٔ مختصات را مشخص می‌کنند. دوتساوی مذکور معمولا بصورتی هستندکه مجموعهٔ نقاط متناظر بامقادیر مختلف t ، شکل مفروض را مشخص می‌کند. دراین‌حالت دومعادلهٔ مزبور را معادله‌های پارامتری شکل مفروض می‌گوئیم .

درمعادله‌های پارامتری یك‌شکل،گاهی پارامتر t همهٔ اعداد حقیقی را می‌تواند داشته‌باشد و گاهی فقط درفاصلهٔ معین‌ازاعداد حقیقی تغییرمی‌کند، اما درهرصورت مجموعهٔ مقادیر t به‌ترتیبی است‌که تمام نقاط شکل مربوط رامشخص می‌کند.

درحالت‌کلی تساویهای $x=g(t)$ و $y=h(t)$ را درصورتی معادله‌های پارامتری منحنی C بمعادلهٔ $f(x,y)=0$ می‌گوئیم که به‌ازای هرمقدار دلخواه ازفاصلهٔ تغییرات t تساوی $f[g(t), h(t)]=0$ برقرار باشد ومتناظر باهرجفت اعداد x و y که درمعادلهٔ $f(x,y)=0$ صدق می‌کنند، عددی مانند t وجود داشته باشدکه به‌ازای‌آن عبارات $g(t)$ و $h(t)$ به‌ترتیب با x و y متساوی باشند.

ازآنچه‌گفته شد معلوم می‌شودکه اگر دوتساوی :

$$x=g(t) \text{ و } y=h(t)$$

معادله‌های پارامتری یك شکل باشند، برای تعیین معادلهٔ شکل دردستگاه قائم‌کافی است پارامتر t رااین دوتساوی اخیر حذف‌کنیم تارابطهٔ بین x و y به‌صورت مستقل از t، که همان معادلهٔ شکل دردستگاه قائم است، مشخص گردد .

در حالت‌کلی حذف t بین‌معادله‌های پارامتری دشوار و حتی غیرعملی است.

مثال ۱ - معادله‌های پارامتری یك‌منحنی بصورت $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=4t^2-1 \end{cases}$ است معادله این منحنی دردستگاه قائم را بیابید .

حل -

$$x=2t+1 \Longrightarrow 2t=x-1 \Longrightarrow t=\frac{x-1}{2}$$

$$y=4t^2-1 \Longrightarrow y=4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2-1 \Longrightarrow \boxed{y=x^2-2x}$$

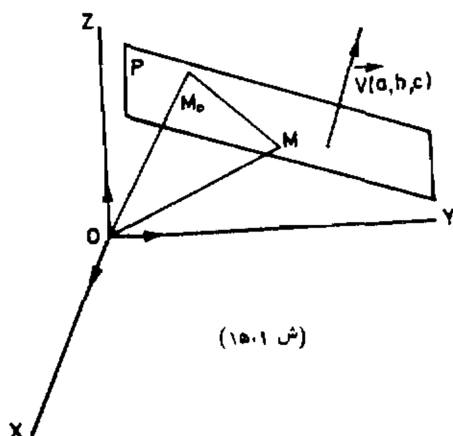
مثال ۲ - معادله‌های پارامتری یك منحنی بصورت $\begin{cases} x=2tg\alpha+1 \\ y=\dfrac{1}{\cos\alpha} \end{cases}$ است معادله این منحنی

دردستگاه قائم را پیدا کنید.

$$x = 2\,tg\alpha + 1 \Longrightarrow x - 1 = 2\,tg\alpha \quad \boxed{\frac{x-1}{2} = tg\alpha}$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Longrightarrow y^2 = 1 + \frac{(x-1)^2}{4} \quad \text{یا} \quad \boxed{y^2 - \frac{(x-1)^2}{4} = 1}$$

۳.۵.۱ ـ معادلهٔ صفحه ـ در دستگاه مختصات سه بعدی $O.xyz$ صفحهٔ P را در نظر می گیریم (شکل ۱.۵.۱). وضع صفحه را نسبت به این دستگاه با مختصات یك نقطهٔ M_0 از آن صفحه و امتداد $\vec{V}(a , b , c)$ که بر آن صفحه عمود است مشخص می کنیم. زیرا از هر نقطهٔ مفروض یك صفحه و فقط یك صفحه عمود بر امتداد معین $\vec{V}$ مرور می کند. پس اگر نقطهٔ $M(x , y , z)$ نقطهٔ غیر مشخصی از فضای $O.xyz$ فرض شود، شرط لازم و کافی برای آنکه $M \in P$ باشد آنستکه $\vec{V} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.



(ش ۱۵.۱)

این رابطه را معادلهٔ برداری صفحهٔ P می گوئیم.

معادله برداری صفحه را به صورت زیر برحسب پارامترهای مشخص کنندهٔ صفحه (x_0 و y_0 و z_0 مختصات نقطهٔ M_0 از صفحه و a و b و c مختصات $\vec{V}$ است) و مختصات یك نقطهٔ غیر مشخص آن (x , y , z) می توان تبدیل کرد.

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \Longrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

و از این معادله نتیجه می شود :

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

اما M_0 و $\vec{V}$ مشخص هستند و بنابراین عبارت $ax_0 + by_0 + cz_0$ همان $\vec{V} \cdot \overrightarrow{OM_0}$ است که مقدار ثابت دارد و می توان آنرا با نماد $-d$ نمایش داد. پس معادلهٔ صفحه را به صورت کلی زیر خلاصه می کنیم :

$$ax + by + cz + d = 0$$

یعنی : در دستگاه مختصات قائم سه بعدی ، معادلهٔ هر صفحه یك معادلهٔ درجه اول است و بعکس

هر معادلهٔ درجهٔ اول یك صفحه را مشخص می‌کند.

روشن است که اگر برخی از تصویرهای $\vec{V}$ صفر باشند، صفحهٔ P باصفحه‌ها یا بامحورهای مختصات موازی خواهد بود و معادله آن بـه‌صورتهای ساده‌تر تبدیل می‌شود. مثلا اگـر $c=0$ یعنی $\vec{V}\perp oz$، (یـا $\vec{V}\parallel xoy$)باشدصفحه P موازی با oz (یاعمود برصفحه xoy) استو به معادله $ax+by+d=0$ است.

اگر a و b هردو مساوی صفر باشند $\vec{V}\perp xoy$ (یـا $\vec{V}\parallel oz$)وصفحه P موازی با صفحهٔ xoy (یا عمود بر oz) است ومعادلهٔ آن‌به صورت $cz+d=0$ یا $z=-\dfrac{d}{c}$ است

این معادله، مجموعهٔ نقاط به‌ارتفاع ثابت$-\dfrac{d}{c}$ را مشخص می‌کند که صفحه‌ای است مـوازی باصفحهٔ xoy.

هرگاه $-d=ax_0+by_0+cz_0=0$ یعنی $\vec{V}\cdot\vec{OM_0}=0$ باشد معادلهٔ صفحهٔ P به صورت ساده‌تر زیر خواهدبود:

$$ax+by+cz=0$$

این معادله نشان می‌دهد که صفحهٔ P در این حالت از مبدأ مختصات می‌گذرد. از معادله برداری $\vec{V}\cdot\vec{OM_0}=0$ نیز همین نتیجه به دست می‌آید زیرا با فرض $\vec{V}\neq 0$ در صورتی‌تساوی فوق برقرار خواهد بودکه $\vec{OM_0}\perp\vec{V}$ یا $\vec{OM_0}=\vec{0}$ باشد، هریك ازاین دوشرط فقط‌درصورتی برقرار است‌که $O\in P$ باشد.

مثال ۱ - معادله صفحه‌ای کـه برمحور Ox عمود و بـه فاصله ۴+ از آن محور بـاشد $x=4$ است.

مثال ۲ - معادله صفحه‌موازی محور Oy که محورهای Ox و Oz رادرنقاطی به‌فاصله‌های ۲+ و ۳+ از مبدأ مختصات قطع می‌کندبه‌صورت $\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}=1$ یـا $3x+2z=6$ است (شکل ۱۶-۱).

مثال ۳ — معادله صفحه‌ای کـه بـرنقطه (۱ ، ۱ ، ۱) M می‌گذرد و بر (۱، ۱ ، ۱) $\vec{V}$ عمود است به صورت $x+y+z=3$ است.

۳-۵-۱— صفحه‌های متوازی - شرط لازم وکافی برای آن کـه دوصفحه P و P′ متوازی باشند

آن است که بردارهای عمود برآنها متوازی باشند. اگر صفحه‌های P و P' به ترتیب به معادله‌های :

$$ax+by+cz+d=0$$

و

$$a'x+b'y+c'z+d'=0$$

باشند، $\vec{V}(a , b , c)$ عمود برصفحه P و $\vec{V'}(a' , b' , c')$ عمودبرصفحه P' است؛ بنابراین شرط لازم وکافی برای توازی دوصفحه P و P' آن است که:

$$a=la' \text{ و } b=lb' \text{ و } c=lc'$$

اگر بعلاوهٔ $d=ld'$ باشد، دو صفحه P و P' دارای‌یك معادله‌اند و بنابراین بریکدیگر منطبق هستند .

مثال ۱ — دو صفحه :

$$P : x+y+z+1=0$$

$$P' : 2x+2y+2z+1=0$$

متوازیند.

مثال ۲ — دو صفحه :

$$P : 2x+y-z=0$$

$$P' : 4x+2y=2z$$

بر یکدیگر منطبق‌اند.

مثال ۳ — اگر بخواهیم معادله صفحه‌ای راکه ازنقطه $A(1 , 1 , 1)$ بموازات صفحهٔ

$$P : 2x-y+z=1$$

مرور می‌کند بنویسیم، ملاحظه می‌کنیم که اگر معادله آنصفحه بصورت :

$$ax+by+cz+d=0$$

باشد ، باید اولا :

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{-1}=\frac{c}{1}$$

ثانیاً

$$a+b+c+d=0 \quad \text{(چرا ؟)}$$

از حل این دستگاه معادله‌های‌سه مجهولی a و b و c و d مشخص میشوند و معادله صفحه مطلوب به صورت :

$$2x-y+z-2=0$$

بدست می‌آید.

۱۰.۵.۴ـ صفحه‌های عمود برهم - می‌دانیم که دوصفحه وقتی بر یکدیگر عمودند کـه خطهای عمود برآنها با هم‌زاویهٔ قائمه تشکیل دهندوبعکس؛ بنابراین‌شرطلازم وکافی برای‌آنکه دوصفحهٔ:

$$P: ax+by+cz+d=0$$
$$P': a'x+b'y+c'z+d'=0$$

بریکدیگر عمود باشندآن است‌که بردارهای $\vec{V}(a, d, c)$ و $\vec{V'}(a', b', c')$ برهم‌عمود باشند یعنی :

$$aa'+bb'+cc'=0$$

مثال ۱ـ دوصفحه بمعادله‌های :

$$x+y+z+1=0$$
$$\frac{x}{2}-y+\frac{2z}{3}-2=0$$

بریکدیگر عمودند .

مثال ۲ـ بـرای تعیین معادلهٔ صفحه‌ای‌که بـردونقطهٔ $A(1, 2, 0)$ و $B(0, 0, 2)$ می‌گذرد و برصفحهٔ مفروض

$$P: x+y+3z=0$$

عمود است، ملاحظه می‌کنیم که اگر معادلهٔ صفحهٔ‌مطلوب به‌صورت:

$$ax+by+cz+d=0$$

باشد، چون این‌صفحه بردونقطه A و B می‌گذرد لزوماً :

$$a+2b+d=0$$
$$2c+d=0$$

و چون صفحهٔ مطلوب برصفحهٔ P عمود است :

$$a+b+3c=0$$

و از این دستگاه سه معادلهٔ سه مجهـولی $c=-\frac{d}{2}$ و $b=-\frac{5d}{2}$ و $a=4d$ بـدست می‌آید ؛

پس معادلهٔ صفحهٔ مطلوب به‌صورت :

$$8x-5y-z+2=0$$

مشخص می‌شود .

۵.۵.۱ ـ فاصلهٔ نقطه از صفحه ـ صفحهٔ P به معادلهٔ :

$$ax+by+cz+d=0$$

و نقطهٔ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ را در نظر میگیریم (شکل ۱۶.۱) اگر نقطهٔ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ تصویر قائم نقطهٔ M_1 برصفحهٔ P و نقطهٔ O مبدأ مختصات باشد:

$$\overrightarrow{M_0M_1}=\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_0}$$

اگر طرفین این تساوی را در بردار $\vec{V}(a, b, c)$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

(ش ۱۶.۱)

$$\vec{V}\cdot\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{V}\cdot\overrightarrow{OM_1}-\vec{V}\cdot\overrightarrow{OM_0}$$

و با توجه به‌آنکه $\vec{V}\perp P$ و در نتیجه $\vec{V}\parallel\overrightarrow{M_0M_1}$ و ازطرفی داریم:

$$V=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

می‌توان نوشت :

$$M_0M_1=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=|ax_1+by_1+cz_1-(ax_0+by_0+cz_0)|$$

اما $M_0\in P$ و بنابراین $ax_0+by_0+cz_0=-d$، و در نتیجه:

$$M_0M_1=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

تبصره ـ فاصلهٔ مبدأ مختصات از صفحهٔ P به معادلهٔ:

$$ax+by+cz+d=0$$

برابر است با:

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

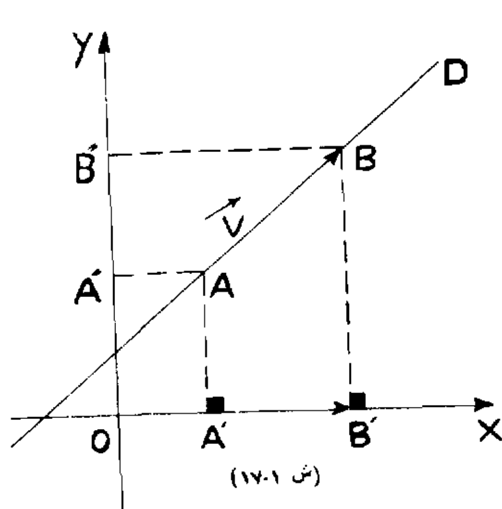
مثال ۱ ـ فاصلهٔ نقطهٔ A (۱ ، ۱ ، ۱) از صفحهٔ P به معادلهٔ :

$$2x+3y+z-1=0$$

برابر است با :

$$A_0A=\frac{|2+3+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{5}{\sqrt{14}}$$

۶.۵.۱ـ راستای خط ـ در دستگاه مختصات قائم راستای خط با ضریب زاویه آن مشخص می‌شود و آن عبارت از تانژانت‌زاویه مثبتی‌است که خط باجهت مثبت محور خفتها تشکیل می‌دهد.



(ش ۱۷.۱)

درحالت کلی راستای هرخط با تصویرهای بردارناصفری واقع برآن مشخص می‌شود. اگر $\overrightarrow{V}(p , q)$ برخط مفروض D واقع باشد، p و q را، پارامترهای‌هادی خط‌می گوئیم. (واضح است که هربردار برابربا $\overrightarrow{V}$ نیز می‌تواند پارامترهای هادی را مشخص کند).

$$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB} \quad P=A'B' \quad q=A''B''$$

در حالت خاص اگر اندازهٔبردار $\overrightarrow{V}$ مساوی ۱ باشد، پارامترهای هادی خط درحقیقت کسینوسهای زاویه‌هایی خواهند بود که آن خط با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد، و آنها را کسینوسهای هادی خط می‌گوئیم. روشن است که اگر α و β کسینوسهای هادی یك خط باشند، $-\alpha$ و $-\beta$ نیز کسینوسهای هادی آن خط هستند و داریم: $\alpha^2+\beta^2=1$

اگر p و q پارامترهای هادی یك خط باشند، آنگاه‌بردار زیر یك بردار یگانی است:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\overrightarrow{i}+\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}\overrightarrow{j}=\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}(p\overrightarrow{i}+q\overrightarrow{j})$$

این بردار یگانی با بردار $p\overrightarrow{i}+q\overrightarrow{j}$ موازی‌است و بنابراین برخط مفروض‌قرار دارد. پس عددهای زیر کسینوسهای هادی آن خط هستند:

$$\alpha=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \quad \text{و} \quad \beta=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$$

همانطور که در بالا اشاره کردیم عددهای $\frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ و $\frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ نیز کسینوسهای هادی خط هستند.

پارامترهای هادی و کسینوسهای هادی برای خط در فضا نیز بهمین روش تعریف می‌شوند اگر بردار $(q ، p ، r)$ $\overrightarrow{V}$ روی خطی (یاموازی آن) باشد، عددهای p و q و r را پارامترهای هادی و عددهای $\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ و $\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ و $\frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$ کسینوسهای هادی خط خواهند بود. در اینجاهم اگر α و β و γ کسینوسهای هادی یك خط باشند، عددهای $-\alpha$ و $-\beta$ و $-\gamma$ نیز کسینوسهای هادی همان خط هستند.

کسینوسهای هادی هرخط تصویرهای بردار یگانی منطبق برآن خط برسه محور مختصات و در حقیقت کسینوسهای زاویه‌هایی هستند که خط مزبور با محورهای ox و oy و oz دستگاه مختصات تشکیل می‌دهد وهمواره بین‌آنها رابطهٔ $\boxed{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1}$ برقرار است.

معادله‌های خط درفضا

تعریف - خط از تقاطع دوصفحه پدید می‌آید .

اگر معادله دوصفحه متقاطع P و P' چنین باشد.

$$P=ax+by+cz+d=0$$
$$P'=a'x+b'y+c'z+d'=0$$

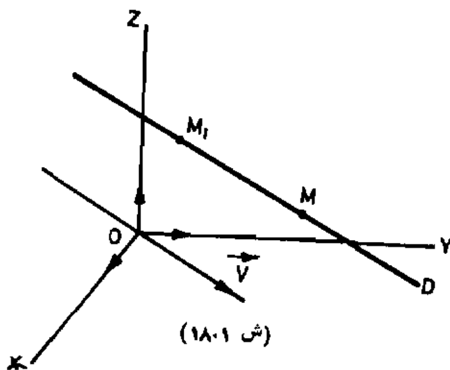
خط مجموعه نقطه‌هایی است که مختصات آنها درمعادله هردوصفحه صدق می کند

پس معادله خط چنین است.

$$\begin{cases} P=0 \\ P'=0 \end{cases} ، \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

می‌دانیم که هر خط بادونقطه یابا یك نقطه و راستایش مشخص می‌شود.

اگر نقطهٔ $M_1(x_1 ، y_1 ، z_1)$ ازیك خط D و p ، q و r پارامترهای هادی‌آن خط معلوم باشند، برای تعیین معادله‌های خط، نقطهٔ غیر مشخصی مانند $M(x ، y ، z)$ بـرآن خط در نظر می گیریم (شکل ۱۸۰۱) . روشن است که $\overrightarrow{V}(p ، q ، r)$ با خط مفروض و در نتیجه با پاره خط M_1M موازی است، بنابراین با توجه بشکل(۱۸۰۱) :



(ش ۱۸۰۱)

$$\overrightarrow{M_1M} = t\,\vec{V}$$

که t عـددی است حقیقی و به M بستگی دارد

(در حقیقت $t = \pm \frac{|\overrightarrow{M_1M}|}{|\vec{V}|}$ که + برای وقتی است که $\overrightarrow{M_1M}$ و $\vec{V}$ هم‌جهت باشندو − برای وقتی است که این دو بردار هم جهت نباشند). برعکس اگر وضع نقطه M نسبت به M_1 چنان باشد که $\overrightarrow{M_1M} = t\,\vec{V}$ باشد واضح است که M روی خط D باید قرار داشته باشد پس معادله خطی که از نقطه M_1 می گذرد و با $\vec{V}$ موازی می باشد به‌صورت زیر است:

$$\overrightarrow{M_1M} = t\,\vec{V} \qquad (-\infty < t < \infty)$$

این معادله را معادله‌برداری‌خط می‌نامیم و از تصویر کردن آن روی محورها به‌معادله های زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} x - x_1 = tp \\ y - y_1 = tq \\ z - z_1 = tr \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x = x_1 + pt \\ y = y_1 + qt \\ z = z_1 + rt \end{cases}$$

معادلات بالا را معادلات‌پارامتری خط می‌نامند. اگر p و q و r هیچ کدام‌صفر نباشند آنگاه معادله خط به صورت زیر نوشته می‌شود:

این‌دومعادله را معادله‌کانونیك خط می‌نامند

$$\boxed{\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q} = \frac{z - z_1}{r}}$$

اگر $p = 0$ باشد ولی q و r صفر نباشند آنگاه معادلات خط را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\begin{cases} x = x_1 \\ \dfrac{y - y_1}{q} = \dfrac{z - z_1}{r} \end{cases}$$

حالتهای دیگری که p یا q یا r صفر می‌شوند بعهده‌دانش‌آموزان می گذاریم .

مثال ۱ ــ برای تعیین معادلهٔ خطی که بردو نقطهٔ $M_1(1, 2, 0)$ و $M_2(2, 0, 1)$ می‌گذرد، از تساوی $\overrightarrow{MM_1} = t\cdot\overrightarrow{M_1M_2}$ استفاده می‌کنیم. معادله‌های خط به‌صورت:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1} = t$$

یا

$$x-1 = \frac{y-2}{-2} = z$$

بدست می‌آیند کسینوسهای هادی این خط به ترتیب $\frac{\sqrt{6}}{6}$ و $\frac{-2\sqrt{6}}{6}$ و $\frac{\sqrt{6}}{6}$ می‌باشند.

مثال ۲ ـ برای تعیین معادلهٔ خطی که از نقطهٔ $M(1, 2, 3)$ می‌گذرد و بامحورهای ox و oy به ترتیب زاویه‌های 60° و 45° تشکیل می‌دهد، ملاحظه می‌کنیم که:

$$\alpha = \cos 60 = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \beta = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و بنابراین}$$

$$\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} \Longrightarrow \gamma = \pm\frac{1}{2}$$

پس مسئله دارای دو جواب است و معادله‌های آنها به صورت زیرند:

$$2(x-1) = \sqrt{2}(y-2) = \pm 2(z-3)$$

معادله‌های پارامتری این دو خط به‌صورت زیرند:

$$x = 1 + \frac{1}{2}t$$

$$y = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}t$$

$$z = 3 \pm \frac{1}{2}t$$

اگر بخواهیم نقطه‌ای بــه طول ۲ بر این خط مشخص کنیم ، ملاحظه می‌کنیم که لزوماً $1 + \frac{t}{2} = 2$ و ازآنجا $t = 2$؛ یعنی نقطهٔ مزبــور به‌ازای عدد ۲ از پارامتر t مشخص می‌شودو نقطه‌های $A_1(2, 2+\sqrt{2}, 4)$ و $A_2(2, 2+\sqrt{2}, 2)$ جوابهای مسئله‌اندکه هریك بــر یکی از دو خط مزبور واقع است.

۴.۵.۱ ـ خطهای موازی وعمود برهم

شرط توازی دو خط ـ دیدیم که شرط لازم و کافی بــرای آنکه دو خط متوازی باشند آنستکه

پارامترهای هادی (یا کسینوسهای هادی) آنها متناسب باشند. پس اگر خط D با امتداد $\vec{V}(p,q,r)$ و خط D' با امتداد $\vec{V'}(p',q',r')$ مشخص شده باشند:

$$D \parallel D' \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} p = ap' \\ q = aq' \\ r = ar' \end{array} \right.$$

در حالت خاص که دو خط مفروض در یك صفحه از صفحات مختصات، مثلا در صفحهٔ xoy، واقعند، شرط لازم و کافی برای توازی آنها بصورت $p = ap'$ و $q = aq'$ خلاصه می‌شود.

در اینحالت $\frac{q}{p} = \frac{q'}{p'}$ و با ملاحظه آنکه $\frac{q}{p}$ ضریب زاویه‌ای خط D است، می‌توان گفت:

شرط لازم و کافی برای آنکه دو خط از صفحهٔ مختصات xoy بایکدیگر موازی باشند آن است که ضریب زاویه‌های متساوی داشته باشند.

شرط آنکه دو خط برهم عمود باشند ـ اگر دو خط D و D' به‌ترتیب با $\vec{V}(p, q, r)$ و $\vec{V'}(p', q', r')$ نموده باشند. شرط لازم و کافی برای آنکه بر هم عمود باشند آنستکه $\vec{V} \cdot \vec{V'} = 0$ و با توجه به حاصل‌ضرب درونی دو بردار نتیجه می‌شود:

$$\boxed{pp' + qq' + rr' = 0}$$

اگر دو خط D و D' درصفحهٔ xoy باشند، شرط عمود بودن آنها بصورت سادهٔ زیر خلاصه می‌شود:

$$\boxed{pp' + qq' = 0}$$

که رابطه اخیر همان رابطه $mp \cdot mp' = -1$ می‌باشد.

مثال ۱ - دو خط :

$$D: x = y - ۱ = z - ۲$$

$$D': \frac{x - ۲}{۲} = \frac{y - ۳}{۲} = -\frac{z}{۶}$$ و

بر یکدیگر عمودند (چرا؟)

مثال ۲ - برای تعیین معادلهٔ خطی کـه از نقطهٔ (۰ ، ۱ ، ۱) A می‌گذرد و برخط D به معادله‌های :

$$x = \frac{y}{۲} = \frac{z}{۳}$$

عمود است ، ملاحظه می‌کنیم که کسینوسهای هادی خط D به‌ترتیب $\frac{۱}{\sqrt{۱۴}}$ و $\frac{۲}{\sqrt{۱۴}}$ و $\frac{۳}{\sqrt{۱۴}}$ هستند (چرا؟) ؛ و اگر کسینوسهای هادی‌خط مطلوب را α و β و γ فرض کنیم، باتوجه‌به‌آنکه دو خط باید برهم عمود باشند، می‌توان نوشت:

$$\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲ = ۱$$
$$\alpha + ۲\beta + ۳\gamma = ۰$$

ایـن دستگاه دو معادله دارای سه مجهول است و بنابرایـن جوابهای بی‌شمار دارد، یعنی خطهای بی‌شمار می‌توان داشت‌کـه از نقطهٔ A می‌گذرند و باخط D زاویهٔ قائمه‌تشکیل‌می‌دهند (چرا؟) . بنابراین برای مشخص شدن خط مطلوب شرط دیگری نیز لازم است .

فرض می‌کنیم بخواهیم‌که خط مزبور با محورهای ox و oy زاویـه‌های متساوی تشکیل دهد؛ در اینصورت $\alpha = \beta$ و دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر را خواهیم داشت:

$$۲\alpha^۲ + \gamma^۲ = ۱$$
$$\alpha + \gamma = ۰$$

از حل ایـن دستگاه $\beta = \alpha = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ و $\gamma = \mp\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ بدست می‌آید و معادلهٔ‌خط‌مطلوب‌به‌صورت زیر می‌باشد :

$$x - ۱ = y - ۱ = -z$$

مسئله - بر خط D به معادله‌های پارامتری :

$$\begin{cases} x = t + ۱ \\ y = ۲t + ۲ \\ z = ۳t + ۳ \end{cases}$$

نقطه‌ای تعیین کنید که از صفحهٔ P به معادله:

$$۳x+۲y+z=۰$$

به فاصلهٔ $\frac{۵}{۷}\sqrt{۱۴}$ باشد.

حل ـ اگر $A(x_۱ ، y_۱ ، z_۱)$ نقطهٔ مطلوب و $A_۰A$ فاصلهٔ آن نقطه از صفحهٔ مفروض باشد:

$$A_۰A=\frac{|۳x_۱+۲y_۱+z_۱|}{\sqrt{۱۴}}$$

و چون $A_۰A=\frac{۵}{۷}\sqrt{۱۴}$ است، خواهیم داشت: $۳x_۱+۲y_۱+z_۱=\pm۱۰$ ، از طرفی نقطهٔ A بر خط D واقع است و مختصات آن در معادله‌های خط باید صدق کنند، یعنی به‌ازای یک‌مقدار مشخص t مختصات نقطه‌ای از خط با مختصات نقطهٔ A مساویند و اگر آن مقدار از پارامتر t را $t_۱$ بنامیم داریم:

$$x_۱=t_۱+۱$$
$$y_۱=۲t_۱+۲ \quad و$$
$$z_۱=۳t_۱+۳$$

و لزوماً:

$$۳(t_۱+۱)+۴(t_۱+۱)+۳(t_۱+۱)=\pm۱۰$$

و از این معادله دو جواب $t_۱=۰$ و $t_۱=-۲$ به دست می‌آیند. بنابراین $A_۱(۱ ، ۲ ، ۳)$ و $A_۲(-۱ ، -۲ ، -۳)$ جوابهای مسئله می‌باشند.

تمرین[1]

۱ـ دریک دستگاه مختصات قطبی نقطه‌های $M(۲ ، \frac{\pi}{۶})$ و $P(۱ ، \frac{\pi}{۴})$ و $Q(۲، -\frac{\pi}{۳})$ و $L(۳ ، \pi)$ و $R(۳ ، \frac{\pi}{۲})$ را مشخص کنید.

۲ـ مجموعهٔ نقاطی را که دردستگاه مختصات قطبی با $\theta=c$ متناظرند مشخص کنید. (در حالت خاص $\theta=۰$ این مجموعه شامل چه‌شکلی است؟).

۱ـ برای حل کردن تمرینهای این کتاب، غیر ازمواردی که روش حل آنها تصریح شده، ازروش هندسی یا تحلیلی به‌اختیار خود استفاده کنید.

۳ـ مجموعهٔ نقاطی را که در دستگاه مختصات قطبی با $\rho = c$ متناظرند مشخص کنید (حالت خاص $\rho = 0$).

۴ـ مختصات دکارتی نقاطی را که درمسئلهٔ ۱ داده شده‌اند، نسبت به‌دستگاه مختصات قائمی که محورخفتها و مبدأ آن برمحور قطبی و قطب آن منطبق هستند حساب کنید.

۵ـ مختصات قطبی نقطه‌های $A(2, 2)$ و $B(-3, -\sqrt{3})$ و $C(-3, 3)$ از صفحهٔ مختصات قائم رانسبت به‌دستگاه قطبی‌که $x'Ox$ محور قطبی آن منظور می‌شود حساب کنید.

۶ـ نقطه‌های $A(3, \frac{\pi}{4})$ و $B(4, \alpha)$ دریك صفحهٔ مختصات قطبی مفروضند؛ زاویه α راچنان حساب کنیدکه اولا $AB = 5$، ثانیاً $AB^2 - OA^2 = 4$.

آیا ممکن است α را چنان اختیار کنیم که $OA = OB$ باشد، چرا؟

۷ـ نقطه‌های $A(4, \frac{\pi}{3})$ و $B(3, -\frac{\pi}{6})$ و $C(3, \frac{\pi}{6})$ و $D(7, \frac{\pi}{2})$ دریك صفحه مختصات قطبی مفروضند. اندازه‌های پاره خطهای AB و BC و AC و AD و BD را حساب کنید.

۸ـ نقطه‌های $A(2, 3, 1)$ و $B(0, 2, 3)$ و $C(1, 0, 2)$ و $D(-2, 1, 2)$ و $M(0, 0, 4)$ را دریك دستگاه مختصات سه‌بعدی نمایش دهید.

۹ـ نقطه‌های $A(3, 0, 0)$ و $B(0, 3, 0)$ و $C(0, 0, 3)$ مفروضند، تحقیق کنید که مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

۱۰ـ بردار $\overrightarrow{OM}$ با محورهای ox و oy و oz از یك دستگاه مختصات قائم به‌ترتیب زاویه‌های $\text{Arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\text{Arc}\cos\frac{\sqrt{2}}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ تشکیل می‌دهد و $OM = 8$ است و مختصات نقطهٔ M هرسه مثبت‌اند؛ تصاویر این بردار را برسه محور مختصات حساب کنید. اگر H تصویر نقطهٔ M بر صفحهٔ xoy باشد، زاویه‌های $\overrightarrow{OH}$ را با دومحور ox و oy تعیین کنید.

۱۱ ـ نقطه‌های $A(2, 3, 0)$ و $B(0, 3, 2)$ مفروضند؛ تصویرهای قائم بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BA}$ را برمحورهای مختصات تعیین کنید وهریك‌از دوبردار را بصورت مجموع هندسی مؤلفه‌های آن برسه محور نمایش دهید. مختصات وسط پاره خط AB را حساب کنید.

۱۲ ـ حاصل‌ضرب درونی $\overrightarrow{V}_1(2, 3, -3)$ و $\overrightarrow{V}_2(3, 2, 4)$ را حساب کنید. از محاسبهٔ این حاصل‌ضرب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ اندازهٔ هریك از دو بردار مفروض را حساب کنید.

۱۳ـ نقطه‌های $M(-3, 4, -2)$ و $N(1, 1, -2)$ مفروضند؛ فاصله هریك ازآنها را از مبدأ مختصات، همچنین فاصلهٔ دونقطه را از یکدیگر تعیین کنید.

۱۴ ـ نقاط $M(-2, 2, 3)$ ، $N(-2, -2, 0)$ ، $P(1, m, 2)$ مفروضند؛ عدد m را چنان حساب کنید که در مثلث PMN: الف زاویهٔ M قائمه باشد ب ـ $PM=PN$ باشد.

۱۵ ـ اگر $\vec{V_1}$ و $\vec{k}$ دو بردار مفروض و $V_1=4$ و $V_2=3$ و $(\vec{V_1}, \vec{V_2})=\frac{\pi}{3}$ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{V}=3\vec{V_1}\wedge 4\vec{V_2}$ را حساب کنید.

۱۶ ـ بردارهای $\vec{V_1}(1, 2, 3)$ و $\vec{V_2}(-1, 2, -3)$ مفروضند؛ تصاویر $\vec{V}=\vec{V_1}\wedge\vec{V_2}$ را برمحورهای مختصات وهمچنین اندازهٔ $\vec{V}$ را حساب کنید.

۱۷ ـ دو بردار $\vec{V_1}(4, 5, n)$ و $\vec{V_2}(2, m, 3)$ مفروضند؛ m و n راچنان حساب کنید که دوبردار متوازی باشند.

۱۸ ـ اعداد α و m و n را چنان حساب کنید که بردارهای $\vec{V_1}(4, \alpha, 5)$ و $\vec{V_2}(m, 3, n)$ باهم برابر باشند.

۱۹ ـ دو بردار $\vec{u}(2, 2, 2)$ و $\vec{v}(2, -2, 2\sqrt{6})$ مفروضند؛ اندازهٔ هریک ازدوبردار حاصل‌ضرب درونی، حاصل‌ضرب برونی و زاویهٔ بین دوبردار را تعیین کنید.

۲۰ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که برنقطهٔ $A(1, 2, 5)$ بگذرد و : الف ـ باصفحهٔ xoy موازی باشد. ب ـ بامحور ox موازی باشد و محور oy را درنقطه‌ای به‌رست ۱ قطع کند. پ ـ با دو محور ox و oz موازی باشد. ت ـ برمحور ox عمود باشد. ث ـ بر بردار $\vec{V}(1, 1, 1)$ عمود باشد.

۲۱ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که بر مبدأ مختصات و نقطه‌های $A(1, 1, 2)$ و $B(0, 2, 3)$ بگذرد.

۲۲ ـ نقاط $A(1, 2, -2)$ و $B(2, 1, -1)$ مفروضند، معادلهٔ صفحهٔ عمودمنصف پاره خط AB را بنویسید.

۲۳ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را تعیین کنید که برنقطهٔ $A(-1, 0, 1)$ بگذرد و بر دوصفحهٔ

$$2x+y-z=1$$

و

$$x-y+2z=2$$

عمود باشد.

۲۴ـ معادلهٔ صفحه‌ای را تعیین کنید که از نقطهٔ $A(۲ ، ۱ ، ۰)$ بگذرد و با صفحهٔ :

$$P:\ x+۲y+z+۱=۰$$

موازی باشد .

۲۵ـ اعداد α و β راچنان حساب کنید که دوصفحهٔ P و P' بمعادلات زیرموازی باشند.

$$P:\ x+\alpha y+\beta z+۱=۰$$

$$P':\ \alpha x+y+۳z+۲=۰$$

۲۶ـ تحقیق کنید که صفحه‌های P و P' بمعادله‌های زیر متقاطعند .

$$P:\ x+۲y+۱=۰$$

$$P':\ y+۲z+۱=۰$$

۲۷ـ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که بردو نقطهٔ $A(۲ ، ۱ ، ۳)$ و $B(۱ ، ۲ ، ۳)$ بگذرد و بر صفحهٔ xoy عمود باشد.

۲۸ـ برصفحهٔ P به معادلهٔ:

$$x+۲y+z-۱=۰$$

صفحه‌ای عمود کنید که بر دونقطهٔ $A(-۱ ، ۰ ، ۱)$ و $B(۲ ، ۱ ، ۲)$ بگذرد.

۲۹ـ صفحهٔ P بمعادلهٔ:

$$x+y+z+۱=۰$$

مفروض است؛ معادلهٔ صفحه‌ای را که بر دو نقطهٔ $A(۱ ، ۱ ، ۱)$ و $B(۲ ، ۲ ، ۲)$ می گذرد و برصفحهٔ P عمود است تعیین کنید. مسئله چند جواب دارد؟ چرا؟

۳۰ـ فاصلهٔ نقاط $O(۰ ، ۰ ، ۰)$ و $A(۱ ، ۱ ، ۱)$ و $B(۲ ، ۱ ، ۲)$ را ازصفحهٔ:

$$P:\ ۲x+y+۲z=۰$$

تعیین کنید.

۳۱ـ عدد α راچنان حساب کنید که فاصلهٔ نقطهٔ $M(۱ ، ۱ ، ۱)$ از صفحهٔ :

$$P:\ \alpha x+y+۲z+۱=۰$$

برابر ۲ باشد.

۳۲ـ عدد α را چنان حساب کنید که دوصفحهٔ P و P' بمعادله‌های داده شدهٔ زیرموازی باشند ودرآن حالت فاصلهٔ دوصفحه را تعیین کنید.

$$P:\ ۳\alpha x+۳y-۶z-۱۵=۰$$

$$P':\ ۲x+y-\alpha z+۴=۰$$

۳۳ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را تعیین کنید که باصفحهٔ :

$$P : 2x+y+z+2=0$$

موازی وازآن صفحه به فاصلهٔ ۲ باشد .

۳۴ ـ خط D با محورهای ox و oy به‌ترتیب زاویه‌های $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ تشکیل داده است .

کسینوسهای هادی آن را حساب کنید.

۳۵ ـ آیا خطی وجود دارد که با محورهای oz و oy به‌ترتیب زاویه‌های $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ تشکیل دهد ؟ چرا ؟

۳۶ ـ امتداد خط D با پارامترهای هادی $2\sqrt{3}$ ، ۱ ، $\sqrt{3}$ مشخص است؛ کسینوسهای هادی خط را تعیین کنید وزاویه‌ای راکه بامحور ox تشکیل می‌دهد، حساب کنید.

۳۷ ـ معادلهٔ خطی را بنویسید که از نقطهٔ (۰ ، ۱ ، ۱) A بگذردو بـا محورهای ox و oy بـه ترتیب زاویـه‌های $\frac{\pi}{6}$ و $Arc\cos\frac{1}{3}$ تشکیل دهد.

۳۸ ـ معادلهٔ خطی را بنویسید کـه بر مبدأ مختصات و بر نقطهٔ $A(2 , 3 , \sqrt{3})$ بگذرد؛ معادله‌های پارامتری این خط رامشخص کنید.

۳۹ ـ برخط D به معادله‌های :

$$x-1=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{4}$$

نقطه‌ای تعیین کنیدکه از مبدأ مختصات به‌فاصلهٔ $3\sqrt{14}$ باشد.

۴۰ ـ خط D با معادله‌های پارامتری آن به‌صورت:

$$x=3t$$

$$y=2t-4$$

$$z=t+5$$

مشخص است؛ براین‌خط نقطهٔ M را چنان تعیین کنیدکه نیم خط oM با محور ox زاویهٔ $\theta=Arc\cos\frac{3}{7}$ تشکیل دهد. مسئله چند جواب دارد؟ چرا؟

۴۱ ـ معادله‌های خطی را که از نقطهٔ (۳ ، ۲ ، ۱) A به موازات خط D به معادله‌های:

$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{4}$$

رسم می‌شود بنویسید.

۴۲ ـ معادله‌های خطی را بنویسید که از مبدأ مختصات بگذرد و با خط Δ به معادله‌های:

$$x = ۵a + ۳$$
$$y = ۲ - ۶a$$
$$z = ۳ - ۴a$$

موازی باشد.

۴۳ ـ اعداد a و b راچنان حساب کنید که دوخط D و D' به‌معادله‌های :

$$D: \quad \frac{x-۱}{a} = y - ۲ = \frac{z-۵}{b}$$

و

$$D': \quad \frac{x}{a+۲} = \frac{y}{a} = \frac{z-۱}{۲b-۳}$$

بایکدیگر موازی باشند. پس‌ازتعیین a و b هریك از دوخط D و D' را بامعادله‌های پارامتری آنها مشخص کنید .

۴۴ ـ عدد m راچنان حساب کنید که دوخط :

$$\frac{x-۱}{m} = \frac{y-۱}{۲} = z$$

و

$$x = y = \frac{z-۱}{m}$$

برهم عمود باشند. آیا دراین‌صورت دوخط مزبور متقاطع خواهند بود ؟

۴۵ ـ معادلهٔ خطی راکه از نقطهٔ $M(۱ \,,\, ۰ \,,\, ۲)$ می‌گذرد وخط D به‌معادله‌های :

$$\frac{x}{۲} = \frac{y-۳}{۵} = \frac{z-۱}{۴}$$

را به‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کند، تعیین کنید .

۴۶ ـ معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که نقطه $M(۱ \,,\, ۱ \,,\, ۱)$ و خط D به‌معادله‌های :

$$\frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{۳} = \frac{z-۴}{۵}$$

را شامل باشد .

۴۷ ـ تحقیق کنید که دوخط :

$$D: \quad \frac{x-۱}{۳} = \frac{y-۲}{۵} = \frac{z+۱}{۲}$$

و

$$D': \quad \frac{x-۱}{۲} = \frac{y-۲}{۳} = \frac{z+۱}{۳}$$

متقاطعند و معادلهٔ صفحهٔ شامل آنها را تعیین کنید .

۴۸ ـ معادلهٔ فصل‌مشترک دوصفحهٔ P و P′ به‌معادله‌های :

$$x+y+z+۱=۰$$

و

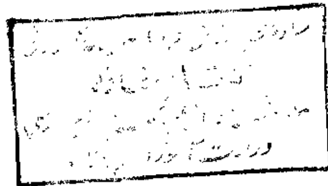
$$۲x+۳y+۴z+۵=۰$$

را تعیین کنید .

۴۹ ـ فصل مشترک دو صفحهٔ P و P′ به معادله‌های داده شدهٔ زیر را تعیین کنید. برصفحهٔ P نقطه‌ای به خفت ۲ مشخص کنید که از صفحهٔ P′ به فاصلهٔ ۵ باشد.

$$P : ۲x+y-۲z=۱$$

$$P' : x-۲y+۲z=۳$$



فصل دوم

دایره

(۲-۱)ـ معادلهٔ دایره و کره

(۱.۱.۲)ـ معادلهٔ دایره دردستگاه مختصات قائم

دایرهٔ $C(O_1 , R)$ را در صفحهٔ مختصات قائم xoy درنظـر می‌گیریم، (شکل ۲ ـ ۱).
چنانکه می‌دانید شرط لازم و کافی بـرای آنکه نقطهٔ M_1 از ایـن صفحه بـر دایره واقع بـاشد آن‌است که :

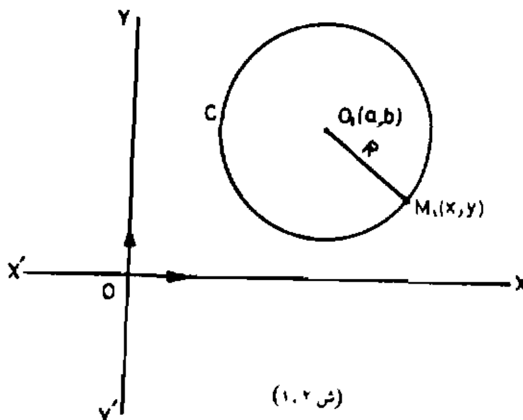
$$O_1M_1 = R$$

اما اگر مختصات مرکز دایره a و b باشند و مختصات نقطهٔ غیرمشخص M_1 از دایره را نسبت به‌این دستگاه مختصات x و y فرض‌کنیم :

$$O_1M_1 = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$$

بنابراین شرط لازم وکافی برای‌آنکه نقطهٔ M_1 ازصفحه بردایرهٔ C واقع باشد آن‌است‌که بین مختصات آن‌نقطه و عوامل مشخص‌کنندهٔ دایره رابطهٔ زیر برقرار باشد :

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}$$



(ش ۲ ـ ۱)

دراین رابطه a ، b ، R عوامل مشخص کنندهٔ دایرهٔ مفروضند که به‌صورت پارامترهایی داده‌می‌شوند. x و y مختصات‌هرنقطهٔ غیرمشخص از دایره‌اند و بنابراین متغیرهایی هستند‌که درهر معادله وجود دارند. این رابطه را معادلهٔ دایـره نسبت بهدستگاه مختصات قائم xoy می‌گوئیم.

روشن است‌که اگر مرکز دایره برمبدأ مختصات منطبق باشد، a و b مساوی صفر و معادلهٔ دایرهٔ بمرکز مبدأ مختصات و به‌شعاع R به‌صورت سادهٔ زیر خواهد بود :

$$x^2+y^2=R$$

دیده می‌شود که معادلهٔ

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

را می‌توان به‌صورت

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}$$

نوشت. بنابراین اگر $a^2+b^2-4c\geqslant 0$ باشد، معادلهٔ بالا دایره‌ای به‌مرکز $H\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

و به‌شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ را مشخص می‌کند.

ازاینجا می‌توان نتیجه گرفت که شرط لازم و کافی برای آنکه رابطهٔ

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

معادلهٔ یک دایره باشد آن است که داشته باشیم : $a^2+b^2-4c\geqslant 0$

۲.۱.۲- معادلهٔ کره - می‌توان دید که در دستگاه مختصات سه بعدی معادلهٔ کره‌ای به مرکز $O_1(a , b , c)$ و به‌شعاع R به‌صورت زیر است :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

و درحالتی که مرکز کره برمبدأ مختصات منطبق باشد، معادلهٔ کره به‌صورت سادهٔ زیر تبدیل می‌شود :

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

مثال ۱- معادلهٔ دایرهٔ به‌مرکز مبدأ مختصات و به‌شعاع $R=3$ به‌صورت زیر است :

$$x^2+y^2=9$$

مثال ۲- معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن نسبت به دستگاه مختصات قائم xoy نقطهٔ $O_1(3 , 4)$ و شعاع آن $R=5$ است، به‌صورت :

$$(x-3)^2+(y-4)^2=25$$

است که آن را به صورت :

$$x^2+y^2-6x-8y=0$$

می‌توان تبدیل کرد.

مثال ۳ــ منحنی C بمعادلهٔ

$$x^2+2x=2y-y^2$$

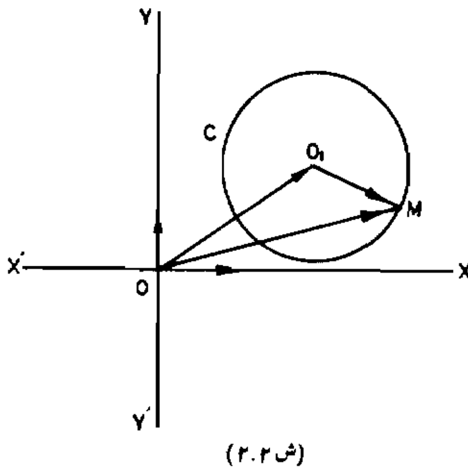
یک‌دایره است، زیرا معادلهٔ‌آن را می‌توان بصورت

$$x^2+2x+1+y^2-2y+1=2$$

یا :

$$(x+1)^2+(y-1)^2=2$$

تبدیل کرد و این معادله نشان می‌دهد که منحنی C دایره‌ای بــه مرکز $O_1(-1 , 1)$ و بشعاع $\sqrt{2}$ است .



(ش ۲.۲)

۲ . ۱ . ۳ ـ معادلــه‌هــای پارامتری دایــره ـ

دایره C به مرکز $O_1\ (a , b)$ و بــه شعاع R را درنظر می‌گیریم. (شکل ۲.۲)معادلهٔاین‌دایره در دستگاه مختصات قائم به‌صورت

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

است. اگــر $M\ (x , y)$ نقطهٔ غیر مشخصی از دایره فرض شود و زاویه‌ای را که شعاع $\overrightarrow{O_1M}$ دایره بامحور $x'Ox$ تشکیل می‌دهد با t نمایش دهیم، روشن است که در هر موقعیت دلخواه از نقطهٔ M خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M}$$

اگر این تساوی برداری را بردو محور مختصات تصویر کنیم. خواهیم داشت:

$$x=a+O_1M\cos t$$
$$y=b+O_1M\sin t$$

$$\boxed{\begin{aligned} x&=a+R\cos t\\ y&=b+R\sin t\end{aligned}}$$

این دو رابطه که به‌ازای هرمقدار t یک نقطه از دایــره را مشخص می‌کنند، معادلــه‌های پارامتری دایره برحسب پارامتر t می‌باشند. روشن است‌که با تغییر t بین ۰ و 2π نقطهٔ M بــر دایرهٔ C جابه‌جا می‌شود و یک دورکامل دایره را سیر می‌کند. پس در این معادلات‌پارامتری دامنهٔ تغییر t فاصلهٔ $[0 , 2\pi]$ است .

اگر a و b هر دو صفر باشند، معادله‌های پارامتری دایره به‌صورت سادهٔ زیرخواهند بود:

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$

$$(0 \leqslant t < 2\pi)$$

مثال ۱ - معادله‌های پارامتری دایره‌ای بمعادله $x^2 + y^2 = 4$ رابنویسید (پارامتررا زاویه شعاع غیرمشخص ازدایره بامحور $x'ox$ اختیارکنید).

حل ـ دایره فوق‌دایره‌ایست بمرکزمبدأ مختصات و بشعاع ۲ بنابراین معادله‌های پارامتری آن چنین است :

$$\left| \begin{array}{l} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array} \right.$$

مثال ۲ - معادله پارامتری دایره‌ای بمعادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ را بنویسید (پارامتر مانند مثال ۱)

حل ـ معادله $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ رابصورت $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ درمیآوریم تا a و b و R محاسبه شود. خواهیم داشت:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow O_1 \left| \begin{array}{l} +1 = a \\ -2 = b \end{array} \right. \qquad \boxed{R = 2}$$

$$\left| \begin{array}{l} x = a + R\cos t \\ y = b + R\sin t \end{array} \right.$$ معادله‌های پارامتری

$$\left| \begin{array}{l} x = +1 + 2\cos t \\ y = -2 + 2\sin t \end{array} \right.$$

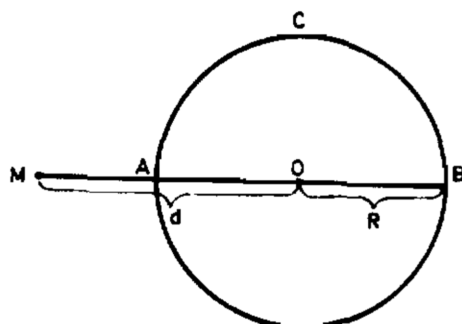
۲ـ۲ ـ قوت نقطه نسبت بدایره

۲. ۲. ۱ـ تعیین قوت نقطه نسبت بدایره

نقطهٔ M را درصفحهٔ دایرهٔ $C(O, R)$ و به‌فاصلهٔ d از مرکز دایره درنظر می‌گیریم (شکل ۲ـ۳)

همانطوریکه میدانیم :

$$\boxed{\mathcal{P}_C^M = d^2 - R^2}$$

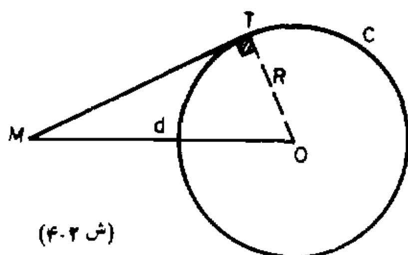


(ش ۳.۲)

یعنی: قوت هرنقطه نسبت به‌دایرهٔ مفروض برابراست بافزونی مربع فاصلهٔ آن نقطه تامرکز دایره برمربع شعاع دایره .

و نیز میدانیم که اگر نقطه‌ای دربرون یا دردرون دایره باشد، قوت آن‌نقطه نسبت به‌دایره عدد مثبت یا منفی است، زیرا در این دو حالت $d>R$ یا $d<R$ است، واگر نقطه‌ای بردایره واقع باشد، از مرکز دایره به‌فاصله‌ای مساوی شعاع دایره واقع است و درنتیجه قوت آن نسبت به‌دایره مساوی صفر است .

هر گاه ازنقطهٔ M واقع برصفحهٔ دایـرهٔ $C(O , R)$ و دربرون آن دایره خطی رسم کنیم که در نقطهٔ T بر دایره مماس باشد(شکل۴.۲)



(ش ۴.۲)

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MTO داریم:

$$MT^2 = MO^2 - R^2 = d^2 - R^2$$

بنابراین :

$$\varphi \frac{M}{C} = \overline{MT}^2$$

یعنی : قوت هرنقطهٔ واقع دربرون یک‌دایره نسبت به‌آن دایره برابر است با مربع اندازهٔ مماسی‌که از آن نقطه‌بردایره رسم شود.

هر گاه نقطهٔ M از صفحهٔ دایره در درون دایرهٔ $C(O , R)$ واقع بـاشد (شکل۲. ۵) چنانکه می‌دانیم، قوت‌آن نسبت به‌دایره عددی منفی است. حال اگر وتر AB از دایـره را در نقطهٔ M برخط MO عمود رسم کنیم، از مثلث قائم‌الزاویهٔ MOA نتیجه می‌شود:

$$|MA|^2 = OA^2 - OM^2 = R^2 - d^2$$

و بنابراین :

$$\overline{MA}^2 = -(d^2 - R^2)$$

یا

$$-\overline{MA}^2 = d^2 - R^2$$

(ش ۵.۲)

و از این تساوی نتیجه می گیریم که‌قدرمطلق‌قوت نقطهٔ M نسبت به‌دایرهٔ C مساوی $\overline{MA}^2$ است. از طرفی AB کوتاهترین وتری از دایره است که‌بر نقطهٔ M مرور می کند(چرا ؟) و MA نصف وتر مزبور است. بنابراین می‌توان گفت :

قدر مطلق قوت هرنقطهٔ دردرون‌دایره نسبت‌به‌دایره برابر است با مربع نصف کوتاهترین وتر دایره‌که برآن نقطه مرور می کند.

۲.۲.۲ - تعبیر تحلیلی قوت نقطه نسبت به‌دایره

اگر در صفحهٔ مختصات xOy نقطهٔ مفروض $M(x_0, y_0)$ و دایرهٔ C به‌معادله

$$C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

را در نظر بگیریم، به‌موجب آنچه ذکر شد، اگر از نظر اختصار $\wp_C^M$ را با عدد p نمایش دهیم:

$$p = d^2 - R^2$$

اما

$$d^2 = MO^2 = (x_0 + \frac{a}{2})^2 + (y_0 + \frac{b}{2})^2$$

و

$$R^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2) - c$$

بنابراین:

$$p = (x_0 + \frac{a}{2})^2 + (y_0 + \frac{b}{2})^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + c$$

یا پس از اختصار:

$$p = x_0^2 + y_0^2 + ax_0 + by_0 + c = C(x_0, y_0)$$

یعنی: قوت هرنقطه از صفحهٔ مختصات نسبت به‌دایره‌ای از آن صفحه با معادله

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

بدین ترتیب بدست می‌آید که درطرف چپ معادلهٔ دایره به‌جای مختصات هرنقطهٔ M (از دایره)، مختصات نقطهٔ مفروض را قرار دهیم.

اگر معادلهٔ دایره به‌صورت:

$$C(x, y) = kx^2 + ky^2 + ax + by + c = 0$$

باشد، قوت نقطهٔ $M(x_0, y_0)$ نسبت به‌آن از دستور:

$$p = \frac{C(x_0, y_0)}{k}$$

بدست می‌آید.

از دستور قوت نقطه نسبت به‌دایره، یعنی از رابطهٔ:

$$p = d^2 - R^2$$

نتیجه‌های زیر بدست می‌آید:

۱- نقطه‌هائی که نسبت به دایرهٔ مفروض قوت مشترك دارند، بر دایره‌ای واقعندکه‌با دایرهٔ مفروض هم مرکز است.

۲ ـ قوت نقطه نسبت به دایرهٔ به شعاع R همواره بزرگتر یا مساوی $-R^2$ است.

۲ـ۳ـ محور اصلی دو دایره

۱.۳.۲ ـ تعریف ـ مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت‌به‌دو دایرهٔ بامرکزهای متمایز و واقع در یك صفحه قوتهای متساوی داشته باشد، محور اصلی دودایره می‌نامند.

این قضیه، وجود مکان هندسی را ثابت می‌کند.

قضیه ـ مکان هندسی نقطه‌ای‌که‌نسبت به دودایره بامرکزهای متمایزقوتهای متساوی‌داشته باشد، خط مستقیمی است عمود برخط المرکزین دو دایره.

برهان ـ اگر نقطهٔ M و دو دایرهٔ $C(O \cdot R)$ و $C'(O' \cdot R')$ (شکل ۲ـ ۶) مفروض باشند، چنانکه قوتهای نقطهٔ M نسبت به این دایره‌ها متساوی باشند. طبق تعریف قوت نقطه خواهیم داشت:

$$MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$$

یا

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2 \quad (1)$$

(ش ۲ـ ۶)

اگر ازنقطهٔ M عمود MH را بر OO' فرودآورده و برامتداد OO' جهت مثبتی اختیارکنیم و نقطهٔ I وسط OO' را مبدأ این محور در نظر بگیریم، در مثلث MOO' داریم:

$$MO^2 - MO'^2 = 2OO' \cdot IH \quad (\text{چرا؟})$$

و باتوجه به‌رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}} \quad (2)$$

و رابطهٔ (۲) باتوجه به‌آنکه پاره خط OO' و نقطهٔ I ثابت هستند نشان می‌دهدکه H نقطهٔ ثابتی از خط OO' است، یعنی همهٔ نقطه‌هایی‌که نسبت به دودایرهٔ C و C' قوت مشترك دارند درنقطهٔ ثابت H بر OO' تصویر می‌شوند و بنابراین بر خطی واقعندکه در نقطهٔ H برخط OO' عمود است.

نیز می‌توان دیدکه هرگاه M نقطه‌ای ازخط Δ (عمود مذکور) باشد، با ملاحظهٔ آنکه در مثلث MOO' لزوماً داریم:

$$MO^2 - MO'^2 = 2OO' \cdot \overline{IH}$$

از تساوی

$$IH = \frac{R^2 - R'^2}{2OO'}$$

خواهیم داشت :

$$MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2$$

$$MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2 \text{ یا}$$

یعنی نقطهٔ M نسبت بهدو دایره دارای قوت‌های مساوی است. بنابراین خط ... مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت بهدو دایره به‌یک قوت است .

برهان به‌روش تحلیلی - اگر دو دایره C و C' نسبت به ... معادله‌های ... باشند :

$$C(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$C'(x, y) = x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

و نقطهٔ $M(x_1, y_1)$ نسبت به دو دایره قوتهای متساوی داشته باشد، طبق آنچه قبلا دیده‌ایم . خواهم داشت:

$$C(x_1, y_1) = C'(x_1, y_1)$$

و با توجه به معادله‌های دو دایره حاصل می‌شود :

$$C(x_1, y_1) - C'(x_1, y_1) = (a - a')x_1 + (b - b')y_1 + c - c' = 0$$

یعنی مختصات نقطه‌هائی که هریک نسبت به دو دایره قوت مشترک دارند در معادله

$$(E) \qquad (a - a')x + (b - b')y + c - c' = 0$$

صدق می کنند. برعکس بسادگی می‌توان دید هر نقطه‌ای که در معادله (E) صدق می کند قوتش نسبت بهدو دایره یکی است.

این معادله ازدرجه‌اول است ونشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی‌می‌باشد که ضریب زاویه‌آن برابر است با :

$$-\frac{a - a'}{b - b'}$$

با درنظر گرفتن $O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ و $O'(-\frac{a'}{2}, -\frac{b'}{2})$ ضریب زاویه خط OO' مساوی است با :

$$\frac{b - b'}{a - a'}$$

و از مقایسهٔ این ضریب‌های زاویه‌ای نتیجه می گیریم که خط به معادلهٔ (E) بر OO' عمود است.

برای مطالعه در خواص محور اصلی دو دایره محورهای مختصات‌را طوری اختیارمی‌کنیم که محـور طولها بر خط المرکزین دو دایره منطبق و محور عرضها برمحور اصلی دو دایره واقع شود. در این صورت معادلهٔ محور اصلی به‌صورت $x=0$ خواهد بود و این موضوع نشان‌می‌دهد که دستگاه مختصات را چنان باید انتخاب کرد که معادله محور اصلی یعنی معادلهٔ (E) به‌صورت اخیر تبدیل گردد. بنابراین بـاید داشته باشیم: $b-b'=0$ و $c-c'=0$ و $a-a'\neq 0$ ؛ ضمناً برای‌آنکه محور طولها برخط‌المرکزین واقع باشد، بـاید داشته باشیم: $b=b'=0$ ؛ از این روی شرایط زیر باید توأماً برقرار باشند:

$$a\neq a' \ ، \ b=b'=0 \ ، \ c=c'$$

در این‌حالت اگر α و α' طولهای مرکزهای دایره‌های مفروض باشند. معادلهٔ دو دایره به‌صورت زیر خواهد بود :

$$C(x \cdot y)=x^2+y^2-2\alpha x+c=0$$

$$C'(x \cdot y)=x^2+y^2-2\alpha' x+c=0$$

حال برای تعیین مختصات نقطهٔ تقاطع دو دایـره بـاید دستگاه دو معادلـهٔ دو مجهولی زیـر را حل کنیم :

$$\begin{cases} C(x \cdot y)=0 \\ C(x \cdot y)-C'(x \cdot y)=0 \end{cases}$$

از این دستگاه دو مجهولی حاصل می‌شود که :

$$\begin{cases} x^2+y^2-2\alpha x+c=0 \\ x=0 \end{cases}$$

و از دستگاه دو مجهولی اخیر معادلهٔ یك مجهولی $y^2+c=0$ بـرحسب رست نقطهٔ مشترك دو دایره بدست می‌آید. ازاین‌معادله نتیجه می گیریم که‌اگر $c>0$ آنگاه معادله جواب ندارد یعنی‌دو دایره نقطه مشترك ندارند. واگر $c=0$ آنگاه‌دودایره برهم‌مماسند و در صورتی که $c<0$ باشد دو دایره در دو نقطه متقاطعند.

۲.۳.۴ــوضع محور اصلی برحسب اوضاع نسبی دو دایره

ازآنچه در بارهٔ محور اصلی دو دایره ذکر شد می‌توان نتیجه گرفت که:

۱) محور اصلی دو دایرهٔ متقاطع خطی است‌که برنقاط مشترك آنها می گذرد، زیرا دراین حالت قوت‌هر نقطهٔ تقاطع دو دایره نسبت به‌هریك از دایره‌ها برابر صفر است.

۲) محور اصلی دو دایرهٔ درون‌هم یا برون‌هم با هیچیك از دایره‌ها نقطهٔ مشترك ندارد،زیرا

در این حالت معادلهٔ $y^2+c=0$ جواب ندارد و بنابراین محور اصلی بمعادلهٔ $x=0$ باهیچیك از دایرهها نمی‌تواند نقطهٔ مشترك داشته باشد.

۳) در دو دایرهٔ مماس برهم محور اصلی برمماس مشترك دو دایـره در نقطهٔ تماس منطبق است. زیرا در دو دایره مماس برهم $c=0$ است و در نتیجه معادلهٔ $y^2+c=0$ بهصورت ویژهٔ $y^2=0$ تبدیل می‌شودکه دارای جواب مضاعف $y=0$ است و نشان می‌دهد که محور اصلی بر هریك از دو دایره مماس است و برخط $x=0$ که عمود برخطالمرکزین است منطبق می‌باشد.

۴) دو دایره هم مرکزمحوراصلی ندارند. زیرا اگر در معادلـههای دو دایـره $a=a'$ و $b=b'$ باشد، معادلهٔ محور اصلی یعنی معادلهٔ (E) به صورت $c=c'$ تبدیل می‌شود که خطی را مشخص نمی‌کند.

خواصی از محور اصلی دو دایره

۱) قسمتی از محور اصلی دو دایره که دربرون دو دایره واقع است، مکان‌هندسی نقطه‌هایی است که ازهریك ازآنها می‌توان دو مماس متساوی بر دو دایره رسم کرد زیرا دراین حالت قوت نقطه نسبت بهدایره بامربع مماس مرسوم ازآن‌نقطه بردایره برابر است، وچون نقطهٔ مزبورنسبت به دو دایره بهیك قوت‌است ، مماسهای مرسوم از آن نقطه بردو دایره متساویند و بهعکس.

۲)محور اصلی دو دایره که شعاعهای‌آنهامتساوی نباشند به مرکز دایرهٔ کوچکتر نزدیکتر است. زیرا اگر شعاعهای دو دایره را R و R' فرض کنیم،در شکل ۲. ۶ داریم :

$$HO^2-R^2=HO'^2-R'^2$$

یا

$$HO^2-HO'^2=R^2-R'^2$$

و اگر $R>R'$ ، آنگاه $HO>HO'$ یعنی نقطهٔ H به نقطهٔ O' نزدیکتر است.

مثال ۱ ــ معادلهٔ محور اصلی دو دایرهٔ :

$$C:\ x^2+(y-4)^2=25$$

$$C':\ (x-3)^2+y^2=16$$

به صورت زیر است :

$$x^2-(x-3)^2+(y-4)^2-y^2=9$$

یا

$$2x-4y=1$$

مثال۲ ــ معادلهٔ محور اصلی دو دایره به معادلههای :

$$x^2+y^2=1$$

و

$$(x-1)^2+(y-1)^2=4$$

چنین است :

$$2x+2y=-1$$

(۴ـ۲) مرکز اصلی سه‌دایره

۱.۴.۲ ـ تعریف ـ اگر نقطه‌ای نسبت بسه دایره که مرکزهایشان بریك خط راست واقع نیستند دارای قوتهای برابر باشد، آن نقطه را مرکز اصلی‌سه دایره می‌نامند.

قضیه ــ هرگاه مرکزهای سه دایره بریك خط راست واقع نباشند، مرکز اصلی آنها وجود دارد ومحور اصلی هر دو دایره (ازآن سه دایره) ازمرکز اصلی می‌گذرد.

برهان ــ سه دایره C و C′ و C″ مانند شکل (۲. ۷) در نظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم خط Δ محور اصلی دو دایره C و C′ وخط Δ′ محور اصلی دو دایره C′ و C″ می‌باشند که در نقطه‌ای مانند I یکدیگر را برخورد می کنند (چرا؟) .

بنا به‌تعریف محور اصلی چون I هم‌روی Δ وهم‌روی Δ′ می‌باشد پس.

$$\mathcal{P}^{I}_{C} = \mathcal{P}^{I}_{C'} \quad \text{و} \quad \mathcal{P}^{I}_{C'} = \mathcal{P}^{I}_{C''}$$

و از مقایسه این‌برابریها خواهیم داشت:

$$\mathcal{P}^{I}_{C} = \mathcal{P}^{I}_{C''}$$

پس اگر Δ″ محور اصلی دو دایره C و C″ باشدآنگاه I روی Δ″ نیزقرار داردوداریم:

$$\mathcal{P}^{I}_{C} = \mathcal{P}^{I}_{C'} = \mathcal{P}^{I}_{C''}$$

یعنی I مرکز اصلی سه دایره است وتنها نقطه‌ای است‌که می‌تواند مرکز اصلی سه دایره باشد زیرا چنین نقطه‌ای بایدروی هرسه‌خط Δ و Δ′ و Δ″قرار گیرد.

نتیجه ــ مرکز اصلی‌سه دایره‌یکتا است.

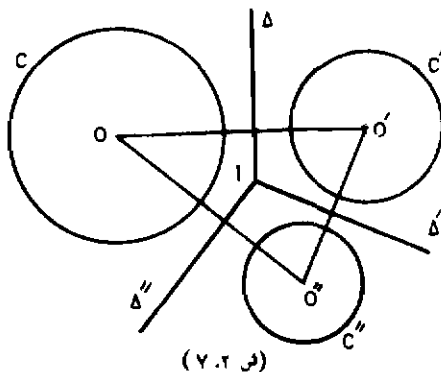
برهان بروش تحلیلی ـ اگر معادله‌های سه‌دایره به‌ترتیب بصورت $C(x \cdot y)$ و $C'(x \cdot y)$ و$C''(x \cdot y)$باشد، معادله‌های سه محــور اصلی به‌ترتیب بصورت زیرند :

$$\Delta \;: C(x \cdot y) - C'(x \cdot y) = 0$$

$$\Delta' : C'(x \cdot y) - C''(x \cdot y) = 0$$

$$\Delta'' : C(x \cdot y) - C''(x \cdot y) = 0$$

و ملاحظه می‌شود که ازدستگاه دومعادلهٔ Δ و Δ′ مختصات نقطـهٔ مشترك Δ و Δ′



(ش ۲. ۷)

به‌صورت

$$C(x , y) - C''(x , y) = 0$$

بدست می‌آید که همان‌معادلهٔ خط Δ'' است؛ یعنی اگر دوخط Δ و Δ' متقاطع باشند، خط Δ'' نیز ازمحل تلاقی آنها می‌گذرد.

یادداشت ۱ـــ اگر مرکزهای سه‌دایره بریك خط راست واقع باشند، محورهای اصلی بایکدیگر موازیند و دراین حالت خاص اگر Δ و Δ' و Δ'' سه خط متمایـز باشند، نقطهٔ مشترك ندارند و دراین صورت برای سه‌دایره مرکزاصلی‌تعریف نمی‌شود واگر Δ و Δ' به‌ترتیب محورهای‌اصلی جفت (C , C') و جفت (C' , C'') بوده وبرهم منطبق باشند، Δ'' نیز برآنها منطبق خواهد بود (چرا؟)؛ دراین‌حالت‌هرنقطه‌ازمحور اصلی مشترك سه‌دایره نسبت به‌سه دایره به‌یك قوت است و در نتیجه مرکزاصلی راتعریف نمی‌کنیم. سرانجام اگرسه دایره هم‌مرکز باشند (باشعاعهای‌مختلف) آنگاه هیچ نقطه‌ای نسبت بـه‌سه دایره دارای قوتهای برابر نیست و درنتیجه مرکز اصلی تعریف نمی‌شود.

یادداشت ۲ـــ اگرمرکز اصلی سه‌دایره دربرون دایره‌ها باشد، ازآن‌نقطه می‌توان سه‌مماس‌متساوی، برسه دایره رسم کرد و اگر مـرکز اصلی سه‌دایره دردرون یك‌دایره باشد، دردرون دودایرهٔ دیگر نیزواقع است و ازآن نقطه سه‌وتر متساوی ازسه دایره می‌گذرد که هریك ازآنها کوچکترین وتر گذرنده ازآن نقطه درهر دایره است.

مثال ۱ـــ سه‌دایرهٔ:

$$C : x^2 + y^2 = 1$$
$$C' : (x-1)^2 + y^2 = 4$$
$$C'' : x^2 + (y-1)^2 = 9$$

را در نظر می‌گیریم. مـرکزهای این دایره‌ها به‌ترتیب $O(0 , 0)$ و $O'(1 , 0)$ و $O''(0 , 1)$ است که بریك امتداد قرار ندارند، بنابراین سه دایره مرکز اصلی دارنـد. معادله‌های محورهای اصلی دوبه‌دو دایره‌ها چنین است:

$$\Delta : x = -1$$
$$\Delta' : 2x - 2y = 5$$
$$\Delta'' : y = -\frac{7}{2}$$

نقطهٔ همرسی این سه خط، که همان مرکزاصلی سه‌دایره است، نقطه $I(-1 , -\frac{7}{2})$ است

و می‌توان دید که قوت آن نسبت به‌دایرهٔ C، $\frac{۴۹}{۴}=۱-\frac{۴۹}{۴}+۱=p$ است. قوت این نقطه را نسبت به‌دودایرهٔ دیگر حساب کنید. نقطه I در برون یادردرون دایره‌ها است؟

مثال ۲ــ دایره‌های :

$$C:\ (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۱$$
$$C':\ (x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۴$$
$$C'':\ (x+۳)^۲+(y+۳)^۲=۹$$

را درنظر می‌گیریم؛ معادله‌های محورهای اصلی دوبه‌دو دایره‌های مزبور عبارتند از :

$$\Delta:\ ۲x+۲y=۳$$
$$\Delta':\ ۲x+۲y=-۱$$
$$\Delta'':\ x+y=-۱$$

ملاحظه می‌شود که این سه‌خط متوازیند (چرا؟)؛ بنابراین سه‌دایره مرکز اصلی ندارند. علت این امر را باتوجه به‌معادله‌های سه‌دایره و بدون‌نیاز به‌محاسبه توجیه کنید .

مثال ۳ــ دایره‌های زیر مفروضند :

$$C:\ x^۲+y^۲=۴$$
$$C':\ x^۲-۲x+y^۲-۲y=۲$$
$$C'':\ x^۲+۲x+y^۲+۲y=۶$$

محورهای اصلی دوبه‌دو دایره‌ها به‌معادله‌های زیر می‌باشند :

$$\Delta:\ x+y=۱$$
$$\Delta':\ x+y=۱$$
$$\Delta'':\ x+y=۱$$

ملاحظه می‌شود که سه‌محور اصلی به‌یك معادله‌اند، یعنی برهم‌منطبق هستند. بنابراین هر نقطه از این خط نسبت به‌سه‌دایره به‌یك قوت است. یعنی سه‌دایره مرکز اصلی ندارند.

نقطهٔ دلخواه M رابرخط $x+y=۱$ درنظر گرفته وقوت‌آن رانسبت به‌سه‌دایرهٔ مفروض حساب‌کنید ونشان دهید که قوت هرنقطه ازخط مزبور نسبت به‌سه دایره یکی است .

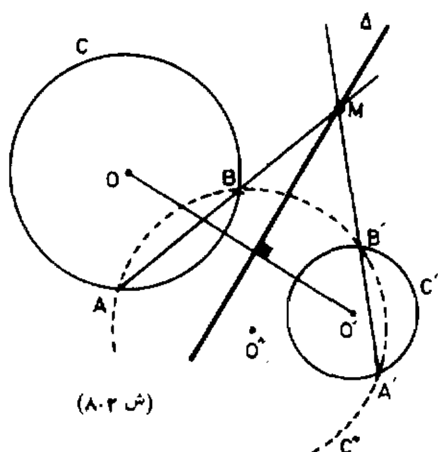
نقطهٔ M را به مختصات $\frac{۱}{۲}+\alpha$ و $\frac{۱}{۲}-\alpha$ درنظر بگیرید .

مسئله‌ــ می‌خواهیم محور اصلی دودایرهٔ مفروض را رسم کنیم .

حل ــ اگردایره‌های مفروض متقاطع باشند خط و اصل بین‌نقاط مشترك آنها، (خط منطبق

بر وتر مشترك دو دایره)، محور اصلی آنها است. هرگاه دو دایره مماس باشند خطی که در نقطهٔ تماس دودایره عمود برخط‌المرکزین رسم شود محور اصلی دودایره است. درحالتی که دودایره برون هم یا درون‌هم باشند برای رسم محور اصلی ازخواص مرکز اصلی استفاده می‌کنیم.

دایره‌های $C(O \cdot R)$ و $C'(O' \cdot R')$ را درنظر می‌گیریم، (شکل ۲ . ۸) دایره‌ای مانند C'' رسم می‌کنیم که باهر دودایره C و C' متقاطع باشد، وترهای مشترك دایره C'' با دایره‌های C و C' یعنی AB و $A'B'$ محورهای اصلی دایـره‌های C و C' را بـا دایره C'' مشخص می‌کنند. اگر این دووتر مشترك درنقطه‌ای مانند M متقاطع باشند، این‌نقطه مرکز اصلی سه‌دایره است و بنابراین محور اصلی دایره‌های مفروض C و C' نیزازاین نقطه باید بگذرد؛ ازطرفی ایـن محور اصلی بر OO' عمود است؛ پس خطی که ازنقطهٔ M بر OO' عمود رسم شود محور اصلی دودایرهٔ مفروض C و C' می‌باشد .

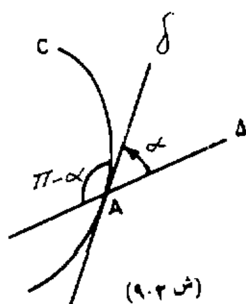


(ش ۲.۸)

درحالتی‌که AB و $A'B'$ متوازی باشند، نقطهٔ O'' مـرکز دایرهٔ C'' را بـر امتداد OO' اختیار کرده‌ایم و با انتخاب نقطه‌ای خارج این خط می‌توان دایره‌ای رسم کرد که به‌تعیین جواب منتهی شود .

(۲ ـ ۵) دایره‌های عمود برهم

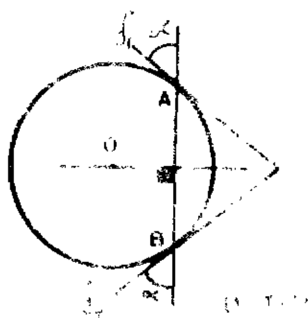
۱.۵.۲ـ زاویهٔ یك خط ویك منحنیـ زاویـهٔ خـط راست Δ بایك منحنی C در یکی از نقاط تقاطع آنها [مثلا نقطهٔ A درشکل (۲ . ۹)] زاویه حاده یاقائمه‌ای است که خط Δ با مماس مرسوم درنقطهٔ A برمنحنی C تشکیل می‌دهد.



(ش ۲.۹)

زاویه یك خط ویك منحنی در یك نقطهٔ‌تقاطع به آن نقطه بستگی دارد و مثلا ممکن است یك‌خط و یك منحنی در یك نقطه یکدیگـر را به زاویهٔ α و در نقطهٔ دیگر به زاویهٔ β قطع کنند و $\alpha \neq \beta$؛ امازاویهٔ یك خط با دایره درهردونقطهٔ تقاطع یکی است زیرا عمودی که از مرکز دایره برخط قاطع فرود می‌آید برای خط‌ودایره‌محور تقارن‌است‌ودر

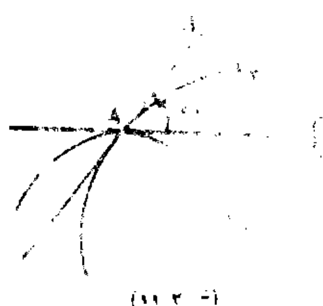
نتیجه‌نقاط تلاقی خط ودایره ومماسهای مرسوم بردایره در آن نقاط نسبت به عمود مرسوم قرینه یکدیگر وبنابراین زاویه‌های خط و دایره در نقاط تقاطعشان بایکدیگر مساویند(شکل ۲.۰ ۱).



در حالتی که زاویهٔ بین خط [illegible] و مماس بر منحنی در نقطهٔ تقاطع قائمه باشد، گوئیم، خط بر منحنی عمود است و چنین خطی را قائم بر منحنی در آن نقطه می‌گوئیم.

در دایره، هر خط گذرنده بر مرکز، بر دایره عمود است و گوئیم قائمهای نقاط دایره در مرکز دایره همرسند.

۲.۵.۲ــ زاویهٔ دو منحنی [illegible] را که در نقطهٔ A متقاطعند در نظر می‌گیریم (شکل ۲.۰ [illegible]) [illegible] نقطهٔ A [illegible] ترتیب بر منحنی‌های [illegible] تشکیل می‌شود [illegible] منحرجه است [illegible] باشد.



(۲.۰ ۱۱)

زاویهٔ حاده یا قائمه‌ای را که بین مماس‌های بر دو منحنی در هر نقطهٔ تلاقی آنها تشکیل می‌شود زاویهٔ دو منحنی در آن نقطهٔ تقاطع می‌نامیم. اگر زاویهٔ دو منحنی در یک نقطهٔ تقاطع قائمه باشد، گوئیم دو منحنی در آن نقطه بر یکدیگر عمودند.

زاویهٔ دو منحنی [illegible] بستگی دارد و مثلاً ممکن است دو منحنی [illegible] زاویهٔ α [illegible] زاویهٔ β یا قائمه قطع [illegible] با زاویهٔ α قطع [illegible] است که خط [illegible]

۳.۵.۲ ـ زاویهٔ دو دایره ـــ به موجب تعریف زاویهٔ بین دو دایره درهر نقطهٔ تقاطع آنها عبارت از زاویهٔ حاده یا قائمه‌ای است که بین مماسهای دو دایره در یکی از نقطه‌های تقاطع آنها تشکیل می‌شود ، مانند زاویهٔ α (درشکل ۱۲.۲).

اگر در دو دایرهٔ C و C' که در نقطهٔ A متقاطعند، خط‌المرکزین OO' برابر با d و شعاعها به‌ترتیب R و R' باشند،

در مثلث OAO' می‌توان نوشت:

$$d^2=R^2+R'^2-2RR'\cos(\pi-\alpha)$$

ویا:

$$d^2=R^2+R'^2+2RR'\cos\alpha$$

و ازآنجا می‌توان داشت:

$$\cos\alpha=\frac{d^2-(R^2+R'^2)}{2RR'} \qquad (F)$$

(ش ۱۲.۲)

از این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که اگر $d^2=R^2+R'^2$ باشد. دو دایره برهم‌عمودند.

اگر دو دایره برهم مماس باشند داریم: $d=R+R'$ یا $d=|R-R'|$، و از رابطهٔ (F) حاصل می‌شود $\cos\alpha=1$ یا $\cos\alpha=-1$؛ واین‌تساویها نشان می‌دهد که $\alpha=0$ یا $\alpha=\pi$؛ یعنی زاویهٔ بین دو دایرهٔ مماس مساوی صفر است و به‌بیان دیگر مماسهای بردو دایره درنقطهٔ تماس برهم منطبق هستند.

۴.۵.۲ دایره‌های عمود برهم

دو دایره راکه زاویهٔ بین‌آنها در نقاط تقاطع قائمه باشد، دایره‌های عمود برهم می‌گوئیم، اگر دو دایرهٔ $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ (شکل ۱۳.۲) که در نقطهٔ A متقاطعند برهم‌عمود باشند، زاویهٔ بین دو خط ΔوΔ' که‌به‌ترتیب بردو دایره در نقطهٔ A مماسند قائمه است و می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta\perp\Delta'\\ \Delta\perp OA\end{array}\right\}\Longrightarrow \Delta'=OA$$

(ش ۱۳.۲)

یعنی Δ' همان خط OA و به‌بیان دیگر، بر OAمنطبق است. بنابراین می‌توان گفت:

۱ـ اگر خطی در یکی از نقاط تقاطع دو دایرهٔ عمودبرهم بریك دایـره مماس باشد، از مرکز دایرهٔ دیگر می گذرد.

۲ـ در دو دایرهٔ عمود برهم، شعاعهای هر نقطهٔ تقاطع برهم عمودند وبعکس، اگر در دو دایرهٔ متقاطع شعاعهای نقطهٔ تقاطع برهم عمود باشند، دو دایره برهم عمودند.

۳ـ در دو دایرهٔ عمود برهم، هر شعاع از یك دایره که از نقطهٔ تقاطع‌دو دایره‌می گذرد، بر دایرهٔ دیگر مماس است و به‌عکس اگر شعاعی از یك دایره‌که از نقطه تقاطع دودایره می گذرد بر دایرهٔ دیگر مماس باشد، دو دایره برهم عمودند.

۴ـ در دو دایرهٔ عمود برهم، مربع خط‌المرکزین مساوی مجموع مربعهای دوشعاع‌دایره‌ها است و به‌عکس.

۵ـ در دودایرهٔ عمود برهم، قوت مرکز هردایره نسبت به‌دایره دیگر بامربع شعاع همان دایره برابر است و به‌عکس.

اگر دو دایرهٔ C و C' برهم‌عمود باشند، داریم:

$$OO'^2 = R^2 + R'^2$$

و بنابراین

$$R^2 = OO'^2 - R'^2$$

و

$$R'^2 = OO'^2 - R^2$$

یعنی :

$$\mathcal{P}_{C}^{O'} = R'^2 \text{ و } \mathcal{P}_{C'}^{O} = R^2$$

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت‌که دو دایره درصورتی می‌توانند بریکدیگر عمود باشند که مرکز هریك در برون دیگری باشد (چرا؟).

صورت تحلیلی شرط عمود بودن دو دایره ـ دو دایرهٔ

$$C : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$C' : x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

را درنظر می گیریم. چنانکه می‌دانیم شعاعهای دو دایره از رابطه‌های :

$$R'^2 = \frac{a'^2 + b'^2}{4} - c' \quad , \quad R^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - c$$

بدست می‌آید واگر d اندازهٔ خط‌المرکزین دو دایره باشد:

$$d^2 = \left(\frac{a - a'}{2}\right)^2 + \left(\frac{b - b'}{2}\right)^2$$

ازطرفی شرط لازم وکافی برای‌آنکه دو دایره بریکدیگر عمود باشندآنستکه داشته باشیم:

$$d^2 = R^2 + R'^2$$

که چون مقادیر فوق را در رابطهٔ اخیر قرار دهیم، شرط لازم وکافی برای عمود بودن دو دایره برحسب عوامل مشخص‌کنندهٔ دایره‌ها به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left(\frac{a-a'}{2}\right)^2+\left(\frac{b-b'}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}-c+\frac{a'^2+b'^2}{4}-c'$$

و پس از ساده‌کردن عبارات طرفین حاصل خواهدشد:

$$aa'+bb'-2c-2c'=0$$

تبصره ــ در حالتی‌که معادلهٔ یکی از دو دایره به‌صورت:

$$x^2+y^2=R^2$$

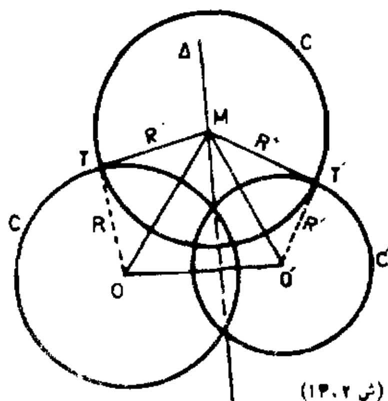
و معادلهٔ دایرهٔ دیگر به‌صورت زیر باشد:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

رابطهٔ فوق به‌این صورت خلاصه می‌شود: $c+c'=0$؛ وچون $c'=-R^2$ است،خواهیم داشت: $c=R^2$.

قضیهــ قسمتی از محور اصلی دو دایره که در برون دو دایره است مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی است‌که بر دودایرهٔ مزبور عمودند.

برهان ــ اگر دو دایرهٔ $C\ (O , R)$ و $C'\ (O' , R')$ را در نظر بگیریم و نقطهٔ M از خط Δ محور اصلی دو دایره در برون هردو واقع باشد (شکل ۱۴۰۲) ، چنانکه ذکر شد مماسهای MT و MT′ که ازآن نقطه بر دو دایرهٔ C و C′ رسم می‌شوند با یکدیگر مساویند؛ پس اگر دایرهٔ C″ را به مرکز M و به شعاع MT رسم کنیم ، از نقطهٔ T′ نیز می‌گذرد و از طرفی می‌دانیم که $MT^2=MO^2-R^2$، یعنی قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ C بامربع شعاع دایرهٔ C″ مساوی است؛ بنابراین دایرهٔ C″ بر دایرهٔ C عمود است و بهمین دلیل بر دایرهٔ C′ نیز عمود است، یعنی نقطهٔ M مرکز دایره‌ای است‌که بر هر دو دایرهٔ C و C′ عمود است.



(ش ۱۴۰۲)

بعکس، اگر دایرهٔ $C''(M , R'')$ بردو دایرهٔ $C(O , R)$ و $C'\ (O' , R')$ عمودباشد خواهیم داشت :

$$\varphi_C^M=R''^2$$

و

$$\varphi_{C'}^M=R''^2$$

و در نتیجه :

$$\varphi_C^M=\varphi_{C'}^M=R''^2 \qquad (E)$$

یعنی نقطهٔ M نسبت به دو دایرهٔ C و C′ بـه یك قوت است؛ بنابراین، نقطهٔ M بر خط Δ محور اصلی دو دایرهٔ C و C′ واقع است ودرعین حال، رابطهٔ (E)نشان میدهد که R''^2 قوت نقطهٔ M نسبت بهدودایرهٔ C و C′ مثبت‌است ودرنتیجه نقطهٔ M دربرون هردودایره C و C′ واقع‌است.

مسئله ۱ ـ می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که بر سه‌دایرهٔ مفروض عمود باشد.

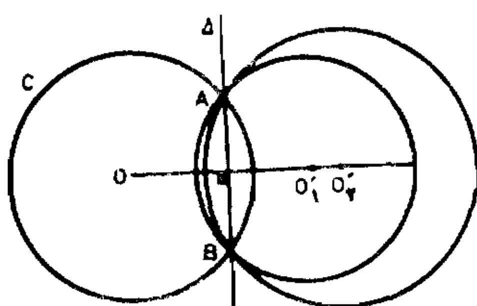
حل ـ به موجب قضیهٔ قبل، مرکز دایرهٔ مطلوب مرکز اصلی سه دایرهٔ مفروض‌است‌وشعاع آن مساوی اندازهٔ مماسی است که از مرکز اصلی بر سه دایرهٔ مفروض رسم می‌شود. این دایره‌را دایرهٔ اصلی سه دایرهٔ مفروض می گوئیم.

سه دایرهٔ مفروض در صورتی دایرهٔ اصلی خواهند داشت کـه دارای مرکز اصلی باشند و مرکز اصلی آنها در درون هیچیك از سه دایرهٔ مفروض نباشد.

مسئله ۲ ــ دایرهٔ C(O ، R) وخط Δ در یك صفحه مفروضند، می‌خواهیم دایره‌ای رسم کنیم که خط Δ برای آن دایره و دایرهٔ C محور اصلی باشد.

حل ــ برای حل مسئله سه حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت :

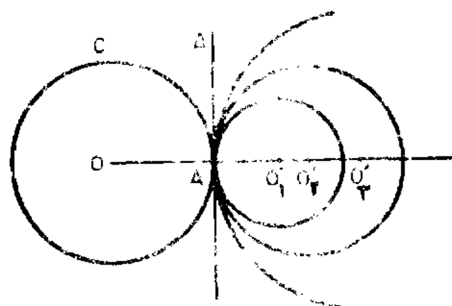
حالت اول وقتی است کـه خط Δ دایرهٔ C را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده باشد (شکل ۱۵.۲) در اینصورت، قوت هریك از دونقطهٔ A و B نسبت بهدایرهٔ C صفراست وبنابراین قوت آن دو نقطه نسبت به دایرهٔ مطلوب‌نیز بایدمساوی صفر باشد؛ پس هردایره که‌برنقاط A وB بگذرد جواب مسئله است ومسئله جوابهای‌بی‌شمار دارد که مرکزهای‌آنها برعمودمنصف AB واقعند.



(ش ۱۵.۲)

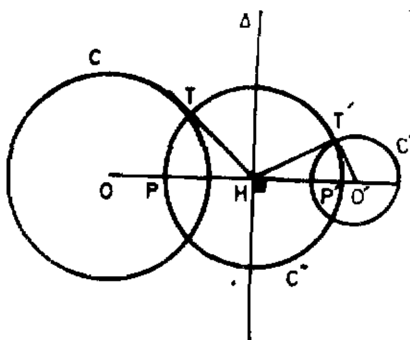
حالت دوم وقتی است که خط Δ بر دایرهٔ C مماس باشد، (شکل ۱۶.۲). دراین‌صورت،هر دایرهٔ دلخواه‌که درنقطهٔ تماس خط‌ودایره برخط Δ مماس باشد، جواب مسئله‌است‌ومسئله‌جوابهای بی‌شمار دارد.

حالت سوم آن است که خط Δ بادایرهٔ C هیچ نقطه مشترك ندارد. در این‌حالت برای رسم دایره مطلوب ملاحظه می‌کنیم که مرکز آن دایره باید برخط OH که از نقطهٔ O برخط Δ عمود رسم شود واقع باشد. از طرفی مماسهایی که از نقطهٔ H بر دایرهٔ C و بـر دایـرهٔ مطلوب رسم می‌شوند باید متساوی باشند؛ پس اگرمماس HT را بر دایرهٔ C رسم کنیم (شکل ۱۷.۲) و



(ش ۱۶.۲)

دایرهٔ C'' را به مرکز H وشعاع HT رسم کنیم، هر نقطه‌مانند T' ازدایرهٔ C'' می‌تواند نقطهٔ تماس خط HT' با دایره‌ای باشدکه با دایرهٔ C محور اصلی Δ را دارد؛ بنابراین، مرکز دایرهٔ مطلوب از یك طرف بر OH و ازطرفی بر عمودی‌واقع است‌که در نقطهٔ T' برخط HT' اخراج شود؛ چون این عمود را رسم‌کنیم تا OH را در نقطهٔ O' قطع‌کند، دایرهٔ C' به مرکز O' و به شعاع $O'T'$ دایرهٔ مطلوب خواهد بود.



(ش ۱۷۰۱)

روشن است‌که در این‌حالت نیز مسئله جوابهای بی‌شمار دارد، زیرا نقطهٔ T' را به‌صورت اختیاری بر دایرهٔ C'' می‌توان در نظرگرفت.

۵.۵.۲ـ دسته دایره

دیدیم‌که هردو دایره (بامرکزهای متمایز) دارای محور اصلی هستند. درمورد سه‌دایره‌که مرکزهایشان بریك‌خط راست واقع نیستند، درست‌یك‌نقطه یافت می‌شودکه قوتهایش نسبت‌به‌سه دایره باهم‌برابرند و این‌نقطه را مرکزاصلی سه‌دایره نامیدیم. همچنین درمسئله ۲ (بندپیش)دیدیم که‌گاه ممکن‌است شماره‌بی‌پایانی ازدایره‌ها یافت‌که خط‌ثابتی برای‌هرجفت ازآن دایره‌هامحور اصلی باشد. باالهام ازاین‌گفته به‌تعریف زیر می‌پردازیم :

تعریف دسته دایره ــ یك‌خط ثابت Δ درنظر می‌گیریم. مجموعه همه دایره‌هایی‌که خط Δ برای هرجفت از آنها محور اصلی می‌باشد یك دسته دایره با محور Δ نامیده می‌شود. می‌دانیم که مرکزهای این‌گونه دایره‌ها همگی برروی خط ثابتی قراردارندکه برΔ عمود است؛ خطی‌که همه مرکزهای دایره‌های یك‌دسته را دربردارد، پایه‌آن دسته دایره نامیده می‌شود.

از تعریف دسته دایره و خاصیتهای محور اصلی بسادگی می‌توان‌گزاره‌های زیر را بدست آورد :

الفــ اگرازدسته دایره‌ای‌محور Δ ویك‌دایره C مشخص باشند،آن‌دسته دایره‌کاملا مشخص است. زیرا هردایره دیگر C' درآن دسته دایره است اگر وتنها اگر Δ محور اصلی دودایره C و C' باشد. (دایره دیگری مانند C'' بگیرید بطوری‌که Δ محوراصلی C و C'' باشد نشان‌دهید Δ محور اصلی C' و C'' نیز خواهد شد.) پس‌دسته دایره داده شده مجموعه همه دایره‌های مانند C' است‌که Δ محوراصلی C و C' می‌باشد.

ب ـ اگر ازدسته دایره‌ای دودایره C_1 و C_2 معلوم باشند، آندسته دایره کاملا مشخص است زیرا بایافتن محور اصلی C_1 و C_2 به‌حالت (الف) برمی گردیم .

پ ـ محور یك‌دسته دایره مجموعه نقطه‌هایی است که هریك ازآنها نسبت بهمه دایره‌های دسته یك‌قوت دارد و برعکس هر نقطه که نسبت بههمه‌دایره‌های یك‌دسته دارای یك‌قوت باشد بر محور دسته دایره قرار دارد .

ت ـ هرگاه محور یك‌دسته‌دایره عضوی‌ازآن دسته‌را دردونقطه قطع کند هردایره دیگر ازآن دسته را نیز درهمان دونقطه قطع می کند. همچنین اگر محور بریك عضو ازدسته دایره درنقطه‌ای مماس باشد آنگاه برهرعضو دیگر نیزدرهمان نقطه مماس است .

معادله دسته دایره از دیدگاه تحلیلی

معادله عمومی دسته دایره - اگر $c(x , y)=0$ و $c'(x , y)=0$ معادله دودایره باشد و α و β دوعدد باشند که باهم صفر نشوند

$$\alpha c+\beta c'=0$$

معادلهٔ دایره‌های بیشماری است این مجموعه‌را دسته دایره گویند.

تبصره ـ درحالتی که‌ضریب‌های x^2 و y^2 درمعادله‌های $c=0$ و $c'=0$ یك‌می‌باشد باید $\alpha+\beta\neq 0$ فرض شود تامحور اصلی که خط مستقیم است عضو دسته دایره نباشد.

برای معادله دسته دایره معادله دایره‌ها را طوری اختیارمی‌کنیم که محور طولها وعرضها بترتیب منطبق برخط‌المرکزین و محور اصلی دودایره باشد دراین‌صورت معادله دودایره c و c' باین‌صورت درمی‌آید .

$$c(x , y)=x^2+y^2-2ax+c=0$$
$$c'(x , y)=x^2+y^2-2a'x+c=0$$
$$\alpha c+\beta c'=(\alpha+\beta)(x^2+\beta^2)-2(a\alpha+\alpha^2\beta)x+c(\alpha+\beta)=0$$

پس‌معادله دسته‌دایره که c و c' دودایره بامرکزهای متمایز ازآن می‌باشند چنین است:

$$x^2+y^2-2\frac{a\alpha+a'\beta}{\alpha+\beta}x+c=0$$

$$\alpha+\beta\neq 0$$

درواقع معادله دسته‌دایره بصورت سادهٔ زیردرمی‌آید.

$$x^2+y^2-2mx+c=0$$

که دراین معادله m عدد حقیقی است.

صورت دیگر معادله دسته دایره - برای سادگی معادله‌ها ، ازاین‌پس محور یك‌دسته دایره داده شده را محور y ها و پایه‌آن دسته‌دایره را محور x ها می‌گیریم .

اگر $(e \, ، \, \circ)$ مختصات مرکز و R شعاع یك عضو دلخواه از دسته دایره باشند، معادله آن دایره به‌صورت $x^2+y^2-2ex+e^2-R^2=0$ خواهد بود . اما قوت مبدأ مختصات نسبت به‌همه دایره‌ها عدد ثابتی مانند p می‌باشد و بنابراین: $p=e^2-R^2$

پس معادله یك‌عضو دلخواه از دسته دایره به‌صورت زیر است:

$$(5) \qquad x^2+y^2-2ex+p=0 \qquad (e^2>p)$$

که p برای همه‌عضوها یکی‌است ولی e از عضوی به‌عضو دیگر تغییر می‌کند و شرط $e^2>p$ برای اینست‌که $R^2>0$ باشد .

برای یافتن نقطه‌های برخورد هر دایره به‌معادله (۵) با‌محور دسته باید x را صفر بگیریم که درآنصورت برابری $y^2=-p$ بدست می‌آید. اگر p مثبت باشد (یعنی مبدأ دربیرون همه دایره‌ها باشد) آنگاه برابری $y^2=-p$ امکان ندارد و در نتیجه محور دسته دایره هیچ عضوی ازآن دسته راقطع نمی‌کند. اگر $p=0$ باشد آنگاه $y^2=0$ جواب دوگانه می‌دهد و درنتیجه محور دسته دایره برهمه دایره‌های دسته مماس است. اگر $p<0$ باشد آنگاه محور دسته دایره همه‌عضوهای آن دسته دایره رادر دونقطه ثابت $(\circ \, ، \, \sqrt{-p})$ و $(\circ \, ، \, -\sqrt{-p})$ برخورد می‌کند. بنابراین چنانچه $p>0$ هیچ دوعضوی‌ازدسته دایره یکدیگررابرخورد نمی‌کنند (دسته‌دایره نامتقاطع). اگر $p=0$ باشد هردوعضوی از دسته دایره برهم مماسند (دسته دایره سایا). اگر $p<0$ باشد همه‌دایره‌ها ازدونقطه ثابت می‌گذرند (دسته دایره متقاطع) .

مزدوج یك دسته دایره - اینك دایره‌هایی را بررسی می‌کنیم که برهر دایره به‌معادله (۵) عمود هستند . فرض می‌کنیم دایره C_1 برهمه دایره‌های (۵) عمود است و معادله آن به‌صورت زیر می‌باشد :

$$(6) \qquad C_1 : \; x^2+y^2+Ax+By+D=0$$

از شرط عمود بودن دودایره نتیجه می‌شودکه :

$$-2eA-2D-2p=0$$

و یا

$$(7) \qquad eA+(D+p)=0$$

اگر در (۷) دومقدار متمایز برای e بگذاریم نتیجه می‌شودکه :

$$(8) \qquad A=0 \quad \text{و} \quad D+p=0$$

و یا $A=0$ و $D=-p$

بنابراین معادله هردایره که برهمه دایره‌های (۵) عمود باشد به‌صورت زیر است:

$$x^2+y^2+By-p=0$$

و برای برقراری مشابهت این معادله بامعادله (۵) بجای B عدد $-2b$ راقرار می‌دهیم تامعادله کلی هردایره عمود بردایره‌های (۵) به‌صورت زیر درآید :

$$x^2+y^2-2by-p=0 \qquad (9)$$

بسادگی‌دیده می‌شود که عکس‌این موضوع نیزدرست‌است یعنی‌اگرمعادله دایره‌ای به‌صورت (۹)باشد برهردایره به‌معادله (۵) عموداست. بامقایسه معادله‌های (۵) و(۹) می‌بینیم که دایره‌های به‌معادله (۹) نیزیك دسته دایره تشکیل می‌دهند که محورآن محور x ها و پایه‌آن محور y ها و قوت مبدأ نسبت به‌هرعضو آن دسته برابر با $-p$ می‌باشد. دودسته دایره (۵) و (۹) را مزدوج یکدیگر می‌گویند.

بنابراین اگر دسته دایره‌ای نامتقاطع باشد، مزدوج آن متقاطع می‌باشد؛ و برعکس اگر دسته دایره‌ای متقاطع باشد، مزدوج آن نامتقاطع است. همچنین دسته دایره‌ای سایا می‌باشد اگر و تنها اگر مزدوج‌آن سایا باشد.

تمرین

۱ـ اگر O_1 مرکز و R شعاع دایره باشد، معادلهٔ دایره را در هریك از حالتهای زیر بنویسید.

$O_1(3,0)$ ، $R=4$ $\qquad$ $O(3,4)$ ، $R=5$

۲ـ تحقیق کنید که هریك‌از رابطه‌های زیرمعادلهٔ یك‌دایره است، مختصات مرکز و شعاع هردایره را حساب کنید.

$x^2+2x+y^2-2y=2$ $\qquad$ $x^2+6x+y^2-8y=0$

$x^2+y^2+8y=9$ $\qquad$ $x^2+2x+y^2=0$

۳ـ معادلهٔ $x^2+4x=4y+y^2$ مفروض است، تعیین کنید نمایش هندسی این معادله چه‌شکلی است.

۴ـ معادله‌های پارامتری منحنی‌هایی به‌صورت :

$$\begin{cases} x=t^2+t \\ y=t^3+t^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{4}(t-1) \\ y=\frac{1}{4}t^2 \end{cases} \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x=t+3 \\ y=1-2t \end{cases}$$

داده شده‌اند؛ معادله این منحنی را دردستگاه مختصات قائم تعیین کنید .

۵ــ زاویهٔ شعاع غیرمشخص از هر دایره را بـا محور $x'ox$ از صفحهٔ مختصات به‌عنوان پارامتر درنظر گرفته و درهریك ازحالات زیرمعادله‌های پارامتری دایره را برحسب پارامتر مزبور تعیین کنید .

$$x^2+(y-5)^2=25 \quad , \quad x^2+2x+y^2=3 \quad , \quad x^2+y^2=9$$

۶ ـ درهریك ازحالات زیر معادله‌های پارامتری منحنی مشخص هستند؛ معادلهٔ منحنی را در دستگاه مختصات قائم تعیین کرده و تحقیق کنید کدام یك‌از منحنی‌ها دایره است؛ مختصات مرکز و شعاع دایره‌ها را تعیین کنید .

$$\begin{cases} x=2+3\sin\theta \\ y=4+3\cos\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x=\cos\theta \\ y=2+\sin\theta \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x=4\sin t \\ y=4\,tg\,t \end{cases}$$

۷ ـ دایرهٔ C بمرکز O و به‌شعاع ۵ سانتیمتر مفروض است؛ سه‌نقطهٔ M و N و L را درصفحهٔ دایره به‌ترتیب به‌فاصلهٔ ۱۰ و ۵ و ۳ سانتیمتر ازمرکز دایره درنظرمی گیریم. اولا قوت هریك ازسه نقطهٔ مزبور رانسبت به‌دایره حساب کنید. ثانیاً برنقطهٔ M نیم‌خط Mx راچنان مرور می‌دهیم که داشته باشیم : $\widehat{xMO}=30^\circ$؛ وضع Mx رانسبت به‌دایره مشخص کنید. اگـر این خط بادایره درنقطهٔ T مشترك باشد، اندازهٔ پاره خط MT را حساب کنید .

۸ ـ دایرهٔ C بمرکز O و به شعاع ۸ سانتیمتر مفروض است؛ قوت نقطهٔ M وسط شعاع AO از دایره رانسبت به‌دایره حساب کنید. اندازهٔ وتر PQ از دایره راکه درنقطهٔ M بر OA عمود است به‌کمك قوت نقطهٔ M نسبت به‌دایره حساب کنید .

۹ ــ نقطه‌ای تعیین کنید که قوت آن نسبت به دایره C به‌معادلهٔ :

$$x^2-6x+y^2=0$$

کوچکترین مقدار ممکن‌را داشته باشد. مقدار قوت‌آن نقطه رانسبت به‌دایره تعیین کنید .

۱۰ــ ثابت کنید محوراصلی دودایره بروسط مماسهای مشترك‌آنها مرور می کند.

۱۱ــ تحقیق کنید کدام‌هرجفت‌از دایره‌هائی‌که معادله‌های‌آنها در یك سطر داده شده است محور اصلی دارند و معادلهٔ محور اصلی دایره‌ها را درهریك ازحالات تعیین کنید .

$$x^2+y^2=4 \quad , \quad x^2-2x+y^2=0$$

$$x^2-2x+y^2+2y=14 \quad , \quad (x-1)^2+(y+1)^2=4$$

$$x^2+y^2-2y=8 \quad , \quad x^2-2x+y^2=8$$

۱۲ــ دایره‌های :

$$C_1 : x^2+y^2=4$$
$$C_2 : (x-1)^2+y^2=9$$
$$C_3 : x^2+(y-1)^2=16$$

مفروضند؛ مرکز اصلی آنها را مشخص کنید و قوت آن را نسبت به دایره‌ها حساب کنید. اندازهٔ مماسی را که از این نقطه برهردایره رسم می‌شود تعیین کنید.

۱۳ــ دایره‌های :

$$C_1 : x^2+y^2=1$$
$$C_2 : (x-1)^2+(y-1)^2=1$$
$$C_3 : (x-1)^2+(y+1)^2=2$$

مفروضند؛ مرکز اصلی آنها را مشخص کنید و قوت آن را نسبت به دایره‌ها تعیین کنید. آیا از این نقطه می‌توان خطی مماس برهردایره رسم کرد؟ چرا ؟

۱۴ــ دایرهٔ $C : (x-4)^2+(y-b)^2=16$ را درنظر گرفته وعدد b راچنان مشخص کنید که دایرهٔ C و دایره‌های C_1 و C_2 درمسئلهٔ ۲۲، مرکز اصلی داشته باشند. مقدار b راچنان تعیین کنید که مرکز اصلی سه‌دایره نقطه‌ای به‌طول ۲ باشد.

۱۵ــ نقاط A و B و C مفروضند؛ دایره‌ای رسم کنید که بردونقطهٔ B و C بگذرد و قوت نقطهٔ A نسبت به‌آن، مقدار معلوم b^2 باشد (بحث).

۱۶ــ دایره‌های :

$$C_1 : (x-2)^2+(y+2)^2=1$$
و
$$C_2 : (x+2)^2+(y-2)^2=4$$

مفروضند؛ برخط $\Delta : x+y=2$ نقطه‌ای تعیین کنید که مماسهای مرسوم ازآن نقطه بردایره‌های C_1 و C_2 متساوی باشند.

۱۷ــ سه‌دایره رسم می‌کنیم که قطرهای آنها به‌ترتیب اضلاع مثلث مفروض ABC باشند مرکز اصلی دایره‌ها را مشخص کنید.

۱۸ــ زاویهٔ بین خط Δ به معادلهٔ $y=x$ و دایرهٔ C به معادلهٔ $x^2-4x+y^2=0$ را تعیین کنید.

۱۹ــ زاویهٔ بین دو دایرهٔ :

$$C : x^2+y^2=4$$
و
$$C' : x^2-2\sqrt{2}x+y^2=0$$

را در یکی از نقطه‌های تلاقی آنها تعیین کنید.

۲۰ـ تحقیق کنید که دایره‌های زیر بریکدیگر عمودند، معادله‌های مماسهائی راکه در نقاط تقاطع برآنها رسم می‌شوند تعیین کنید.

$$C: \ x^2+y^2=25$$

$$C': \ (x-\frac{25}{4})^2+y^2=\frac{225}{16}$$

۲۱ ـ مکان هندسی مرکز دایره‌ای به شعاع R' را که بر دایره $C(O , R)$ عمود است مشخص کنید.

۲۲ ـ خط D به‌معادله $x+y=2$ ودایره C به‌معادله $(x+1)^2+(y+1)^2=2$ مفروضند دایره‌ای به‌شعاع $\sqrt{6}$ مشخص کنید که مرکزش برخط D واقع بوده و بردایره C عمود باشد.

۲۳ ـ دایره‌ای به شعاع معین R' رسم کنید که برنقطه مفروض A بگذرد و بردایره‌مفروض $C(O , R)$ عمود باشد.

۲۴ـ معادلهٔ محور اصلی دسته دایره‌ای راکه دو دایره زیر جزو آنها هستند تعیین کنید:

$$C_1 \ : \ (x-a)^2+y^2=R^2$$
$$C_2 \ : \ (x+a)^2+y^2=R^2$$

اگر دایرهٔ C_3 به معادلهٔ

$$(x-3a)^2+y^2=R^2+8a^2$$

عضوی از دسته باشد، معادلهٔ دایرهٔ دیگری از دسته راکه شعاعش با شعاع این‌دایره مساوی‌است تعیین کنید.

۲۵ ـ دایره‌های

$$C_1(x , y)=x^2-4x+y^2+3=0$$

و

$$C_2(x , y)=x^2+2x+y^2=0$$

مفروضند.

الف‌ـ تحقیق کنید آیا

$$C_1(x , y)+C_2(x , y)=0$$

معادلهٔ یك دایره است یا خیر؟

ب‌ـ مجموعهٔ مقادیر α را چنان تعیین کنید که رابطهٔ :

$$C_1(x , y)+\alpha C_2(x , y)=0$$

معادلهٔ یك دایرهٔ C_3 باشد. به‌ازای $\alpha=3$ محور اصلی دایره‌های C_1 و C_3 همچنین‌محوراصلی دایره‌های C_2 و C_3 را تعیین کنید ونشان دهید دایره‌های C_1 و C_2 و C_3 به یك دسته دایره تعلق

دارند. دایره‌های C'_1 و C'_2 و C'_3 از دسته دایرهٔ مزبور راکه شعاعهایشان به‌ترتیب باشعاعهای C_1 و C_2 و C_3 مساویند مشخص کنید.

۲۶ ـ دو دایرهٔ

$$C_1 : x^2+(y-2)^2=4$$
$$C_2 : x^2-2x+y^2-2y+1=0$$

مفروضند، اولا محور اصلی دسته دایره‌ای را که با این دو دایره مشخص می‌شوند تعیین کنید. ثانیاً معادلهٔ دایره‌ای از این دسته را تعیین کنیدکه به‌شعاع ۴ باشد. ثالثاً مرکز دایره‌ای را تعیین کنیدکه بردودایرهٔ C_1وC_2 عمود و به‌شعاع $\frac{1}{2}$باشد.

۲۷ ـ دو دایرهٔ :

$$C_1 : x^2+y^2-2x-3=0$$
$$C_2 : x^2+y^2+4x-3=0$$

مفروضند ، اولا ـ معادله دسته دایره‌ای را که با این دو دایره مشخص میشود بنویسید . ثانیاً ـ معادله دایره‌ای از این دسته را تعیین‌کنید که قوت نقطه $M(-1,2)$ نسبت به‌آن برابر ۶ باشد . ثالثاً ـ معادله دسته دایره مزدوج دسته دایره فوق را بدست‌آورید . رابعاً ـ معادله دایره‌ای ازدسته اخیر را که بر دایره به‌معادله $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ عمود است تعیین کنید .

۲۸ ـ وتر AB از دایرهٔ مفروض را به چهارپارهٔ متساوی تقسیم می‌کنیم؛ ثابت کنیدنسبت قوتهای نقطهٔ تقسیم اول به نقطهٔ تقسیم دوم مساوی $\frac{3}{4}$ است.

۲۹ ـ مجموع قوتهای دو نقطهٔ A و B نسبت به دایرهٔ مفروض مساوی صفر است؛ ثابت کنید وسط AB در درون دایره است.

۳۰ ـ دایرهٔ $C(O , R)$ و دو نقطهٔ A و B در صفحهٔ‌آن مفروضند؛ اگر M وسط AB باشد، ثابت کنید :

$$p_M < \frac{1}{2}(p_A + p_B)$$

(p_M قوت نقطهٔ M نسبت به دایره است.)

۳۱ ـ از یك نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ متقاطع یك قاطع در دو دایره رسم می‌کنیم؛ ثابت‌کنید مجموع قوتهای وسط این قاطع نسبت به دو دایره مساوی صفر است . به‌کمك این خاصیت مکان هندسی وسط قاطعی راکه از یك نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ متقاطع می‌گذرد تعیین کنید.

۳۲ ـ نقطهٔ A و دایرهٔ C داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌های M را که قوتشان نسبت به

C برابر با MA^2 می‌باشد بدست‌آورید.

۳۳ ـ چرا در سه دایرهٔ دوبه دو متقاطع، سه‌وتر مشترك همرسند؟

۳۴ ـ وتر مشترك دو دایرهٔ متقاطع، مکان هندسی مرکز دایره‌ای است که محیط‌آن به‌وسیلهٔ دو دایره نصف می‌شود.

۳۵ ـ اگر خطی دایرهٔ $C(O ، R)$ را به زاویه α قطع‌کند، فاصلهٔ مرکز دایره از خط مساوی $R\cos\alpha$ است. $(\alpha \leqslant 90^\circ)$

۳۶ ـ از نقطهٔ مفروض خطی رسم‌کنید که با دایرهٔ مفروض زاویه α تشکیل دهد.

۳۷ ـ خطی رسم‌کنید که دو دایره را به زاویه‌های α و β قطع‌کند.

۳۸ ـ دایره‌ای رسم‌کنید که با اضلاع مثلثی زاویه‌های برابر بسازد.

۳۹ ـ ثابت‌کنید تمام دایره‌هایی‌که از نقطه A می‌گذرند و بردایرهٔ مفروض عمودند، از نقطه ثابت دیگری نیز می‌گذرند.

۴۰ ـ بر دو نقطه A و B دایره‌ای مرور دهید که بر دایرهٔ مفروض عمود باشد.

۴۱ ـ بر نقطه مفروض دایره‌ای مرور دهید که بر دو دایرهٔ مفروض‌عمود باشد.

۴۲ـ ثابت‌کنید تمام دایره‌هایی که از نقطه مفروض A می‌گذرند و محیط دایرهٔ مفروضی را نصف می‌کنند، ازنقطه ثابت می‌گذرند.

۴۳ ـ بر دو نقطه مفروض دایره‌ای مرور دهید که محیط دایرهٔ مفروضی رانصف کند.

۴۴ـ مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی را پیدا کنید که محیط دو دایرهٔ مفروض را نصف می‌کنند.

۴۵ـ دایره‌ای رسم‌کنید که محیط سه دایره راکه مرکزهای آنها بریك خط راست واقع نیستند نصف‌کند.

۴۶ـ سه‌دایرهٔ $C(O ، R)$ و$C'(O' ، R')$ و $C''(O'' ، R'')$ ازیك‌دسته‌دایره مفروضند؛ اگر p و p' قوتهای یك نقطه از دایـرهٔ C'' نسبت به دو دایره C و C' باشد، به روش تحلیلی ثابت‌کنید:

$$\frac{p}{p'} = \frac{\overline{O''O}}{\overline{O''O'}}$$

۴۷ ـ مکان هندسی نقطه‌ای را پیداکنید که‌نسبت قوتهایش برای دو دایره مفروض،مساوی عدد مفروض k باشد، $k \neq 1$ (روش تحلیلی)

۴۸ـ مکان هندسی نقطه‌ای را تعیین‌کنیدکه تفاضل قوتهای آن نسبت به دو دایره مفروض مقدار ثابتی باشد. (روش تحلیلی)

۴۹ـ مکان هندسی نقطهٔ M را چنان تعیین کنیدکه p و q قوتهای آن نسبت به دو دایره

مفروض در رابطهٔ :

$$Ap+Bq+D=0$$

صدق کنند. (A و B و D عددهای ثابتی هستند) .

۵۰ ـ دایره C و نقطه ثـابت M مفروضند .فـرض می‌کنیم AB قطرمتغیری ازدایـره C باشد. ثابت‌کنید حاصل‌ضرب $MA \cdot MB \cdot \cos\widehat{AMB}$ بموضع قطر AB بستگی نداشته وبرابر است باقوت نقطه M نسبت به‌دایرهٔ C .

۵۱ ـ دو نقطهٔ B و C برخط Δ به‌قسمی جابه‌جا می‌شوندکه همواره نسبت بدونقطه‌ثابت M و M' مزدوج توافقی یکدیگرند. فرض می‌کنیم A نقطه ثابتی واقع در خارج‌خط Δ باشد. ثابت‌کنید دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر نقطه ثابت دیگری غیر از A می‌گذرد.

۵۲ـ فرض می‌کنیم P و Q دونقطه از یك نیمدایره به‌قطرAB باشند خطوطAPو BQ یکدیگر را در نقطه I قطع می‌کنند. ثابت‌کنید که:

$$AB^2=\overline{AI}\cdot\overline{AP}+\overline{BI}\cdot\overline{BQ}$$

۵۳ـ پاره‌خط AB مفروض است ونقطه O وسط آن است.

اولا ـ دایره غیر مشخص Cراکه برنقطه O می‌گذرد درنظرمی‌گیریم. ثابت‌کنید که‌مجموع قوتهای نقاط A و B نسبت به دایره C مقداری است ثابت و بستگی به دایره Cندارد.

ثانیاًـ اگرمجموع قوتهای‌نقاط A و B نسبت به دایره C برابر با$\frac{AB^2}{2}$باشد، در باره دایره C چه می‌توان گفت؟

۵۴ ـ دو دایـرهٔ C و C' که در دونقطهٔ A و B متقاطعند داده می‌شود از نقطهٔ M روی دایرهٔ C و در برون دایرهٔ C' مماسی بردایرهٔ C' رسم می‌کنیم‌که در نقطهٔ T برآن مماس شود. ثابت‌کنیدکه نسبت:

$$\frac{MT^2}{MA \cdot MB}$$

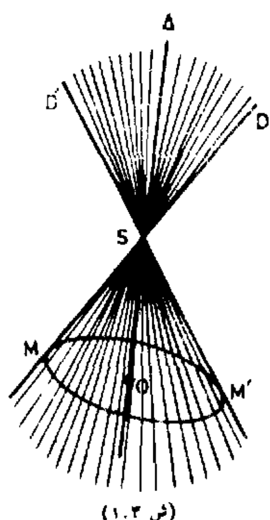
به وضع نقطهٔ M روی دایرهٔ C بستگی ندارد.

فصل سوم

مقاطع مخروطی

(۳ـ۱) کلیات

۱.۱.۳ـ سطح مخروطی دوار ـ چنانکه در برنامه سال سوم دیده‌اید، سطح مخروطی‌دوار سطحی است که از چرخش خط راست D گرد خط Δ متقاطع با آن‌خط، پدید می‌آید. دراین صورت خط Dرا مولد سطح مخروطی و خط Δ را محورآن سطح و نقطهٔSمحل تلاقی DوΔرارأس سطح‌مخروطی می گوئیم.(شکل۳.۱).



(ش ۳.۱)

با توجه به‌آنکه دو خط D و Δ معمولا نامحدود فرض می‌شوند سطح مخروطی از دوقسمت یادودامنه که در دو طرف‌رأس قرار دارند ودر رأس S مشترکند پدید می‌آید .

۲.۱.۳ـ مقاطع مخروطی ـ مقاطع مخروطی منحنی‌هائی هستند که ازبرخوردیك سطح مخروطی‌دوار با صفحه‌هایی که از رأس آن نمی‌گذرند، پدید می‌آیند. برحسب آنکه صفحهٔ قاطع سطح مخروطی دوار رادر یك‌طرف رأس یا در دوطرف‌آن قطع‌کند یاآنکه باموالدی ازسطح مخروطی موازی باشد، ازسطح مخروطی وصفحهٔ قاطع، مقطع‌هائی به شکل‌های مختلف پدید می‌آیند؛ این منحنی‌هاچهارگونه‌اند که در این‌بخش به اختصار به شناسائی آنها می‌پردازیم .

الف ـ اگر صفحه قاطع برمحور سطح مخروطی دوار عمود باشد ، مقطع یك دایره است.

ب ـ هرگاه صفحه قاطع همه مولدهای سطح مخروطی دوار را در یك‌طرف‌رأس‌قطع‌کند و برمحور سطح عمود نباشد،مقطع منحنی بسته‌ای است که‌آنرا بیضی می گویند.

پ ـ هرگاه صفحه قاطع سطح مخروطی دوار را در دوطرف رأس قطع‌کند، مقطع منحنی است متشکل از دو شاخهٔ مجزاکه بسته نیستند وآنرا هذلولی می‌نامند .

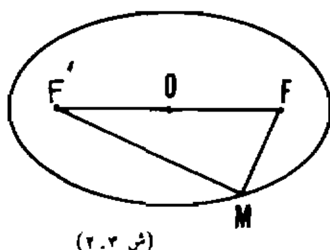
ت ـ هر گاه صفحه قاطع با یکی از مولـدهای سطح مخروطی دوار موازی باشد، مقطع منحنیی است که بسته نیست و دریك طرف رأس واقع می‌شود و آنرا سهمی یا شلجمی می‌نامیم.

در این فصل ما تعریفهای دیگری از مقطعهای مخروطی رابکار می‌بریم که با تعریفهای بالا هم ارزند ولی برهان هم ارزی آنها از بحث این‌کتاب خارج است.

۳ ـ ۲ ـ بیضی

۱.۲.۳ ـ تعریف ـ بیضی مکان هندسی نقطه‌هائی است از یك صفحه که مجموع فاصله‌های هریك‌از آنها از دونقطهٔ ثابت‌آن صفحه، مقدار ثابتی باشد و این مقدار ثابت باید از فاصله دو نقطه ثابت بزرگتر باشد.

هریك از دو نقطهٔ ثابت رایك‌کانون‌بیضی و فاصلهٔ دوکانون‌را فاصلهٔ کانونی‌بیضی می گوئیم. کانونهای بیضی را معمولا با دو حرف F و F' نمایش می‌دهیم و فاصلهٔکانونی رابا ۲c می‌نمائیم، $FF'=2c$.



(ش ۲.۳)

مجموع فاصله‌های هرنقطهٔ بیضی را از دوکانون، که مقدار ثابتی است، با ۲a نمایش می‌دهیم؛ پس‌اگر نقطهٔ M ازصفحه به بیضی تعلق داشته باشد، داریم:

$$MF+MF'=2a$$

به‌عکس، اگر نقطه‌ای مانند M در صفحهٔ شکل مفروض باشد چنانکه داشته باشیم:

$$MF+MF'=2a$$

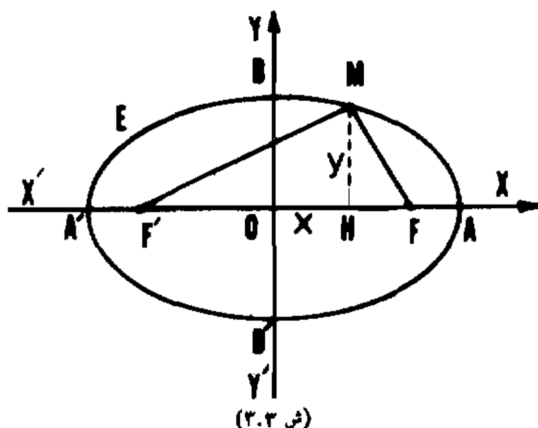
نقطهٔ M به بیضی به‌کانونهای F و F'، با مقدار ثابت ۲a، تعلق دارد، (شکل ۲.۳) عدد ۲a را مقدار ثابت بیضی می گوئیم.

اگر M نقطه‌ای‌از بیضی باکانونهای F و F' و مقدارثابت ۲a باشد. دو خط MF و MF' را شعاعهای حامل نقطهٔ M، یا شعاعهای کانونی نقطهٔ M از بیضی می گوئیم،

از تعریف بیضی نتیجهٔ می‌شود که: $a>c$

در بیضی عدد $\frac{c}{a}$ راکه‌کوچکتر از ۱ است، خروج از مرکز بیضی می گوئیم و معمولا آنرا باعدد e نمایش می‌دهیم. به‌آسانی می توان دید که هرقدر عدد e بزرگتروبه عدد یك نزدیکترباشد بیضی درازتر و به‌یك پاره خط نزدیکتر می‌باشد. و هرقدر عدد e کوچکتر باشد بیضی‌پهن‌تر و به‌دایره نزدیکتر است.

۲.۳.۲ - معادلهٔ بیضی - بیضی E با کانونهای F و F′ ومقدارثابت ۲a رادر نظر گرفته و دستگاه‌مختصات قائم‌راچنان اختیارمی‌کنیم که F′F محورطولهاوعمودمنصف آن پاره خط محور عرضها باشد، (شکل ۳.۳). در این صورت کانونهای بیضی در دستگاه مختصات مزبور بصورت $F(c , o)$ و $F'(-c, o)$ مشخص‌می‌شوند.



(ش ۳.۳)

حال اگر $M(x , y)$ نقطه غیر مشخصی از بیضی مفروض باشد، داریم:

$$(1) \qquad MF+MF'=2a$$

اما $\quad MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2} \quad , \quad MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$

و چون این دو مقدار را درمعادلهٔ (۱) قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

از این معادله می‌توان داشت :

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

با توجه به اینکه عبارات دو طرف این تساوی مثبتند، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و خواهیم داشت :

$$-4cx=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

یا

$$(2) \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x$$

چون دو طرف معادلهٔ (۲) را به توان ۲ برسانیم خواهیم داشت :

$$x^2+2cx+c^2+y^2=a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2+2cx$$

یا

$$x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=a^2-c^2$$

و اگر a^2-c^2 را با b^2 نمایش دهیم حاصل می‌شود :

$$\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$$

و پس ازتقسیم طرفین تساوی بر b^2 خواهیم داشت :

$$(1-3) \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

یعنی مختصات هر نقطهٔ M واقع بر بیضی مفروض درمعادلهٔ (۳-۱) صدق می‌کنند. به‌عکس می‌توان ثابت کرد که هرگاه x و y مختصات یك نقطهٔ M از صفحه در معادلهٔ بالا صدق کنند آن نقطه بر بیضی واقع است. برای اثبات ملاحظه می‌کنیم که از معادلهٔ فوق $y^2=b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2$ حاصل می‌شود، بنابراین:

$$MF'=\sqrt{(x+c)^2+b^2-\frac{b^2}{a^2}x^2}$$

و چون $b^2=a^2-c^2$ است:

$$MF'=\sqrt{(x+c)^2+(a^2-c^2)(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

$$=\sqrt{2cx+a^2+\frac{c^2x^2}{a^2}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x+a\right)^2}=\frac{c}{a}x+a$$

زیرا $c<a$ و درنتیجه $\frac{c}{a}<1$ و به‌ازای مقادیر $|x|\leqslant a$ عبارت $\frac{c}{a}x+a$ مثبت است. بهمین ترتیب ثابت می‌شود که:

$$MF=a-\frac{c}{a}x$$

در نتیجه $MF+MF'=2a$، یعنی نقطهٔ M بر بیضی مفروض واقع است. بنابراین رابطهٔ (۳-۱) معادله بیضی است.

تبصره ـ اگر درتعیین معادلهٔ بیضی محور عرضها رامنطبق‌بر $F'F$ و محور طولها را عمود‌منصف $F'F$ اختیار کنیم، معادلهٔ بیضی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

۳.۲.۳ـ مرکز، محورهای تقارن، رأسها و قطرهای بیضی ـ اگر درمعادله (۳-۱)، x را به $-x$ تبدیل کنیم، تغییری درمعادله پدید نمی‌آید و نشان می‌دهد که اگر نقطهٔ $M(x, y)$ بر بیضی E واقع باشد، نقطهٔ $M'(-x, y)$ قرینهٔ M نسبت به‌محور $y'y$ نیز برآن بیضی واقع است. بنابراین بیضی نسبت به‌محور $y'y$ تقارن دارد. به‌همین‌ترتیب ثابت می‌شود که بیضی نسبت به‌محور $x'x$ متقارن است.

یعنی: هر بیضی نسبت به خط گذرنده از دوکانون آن و همچنین نسبت به‌عمود منصف پاره‌خطی که دوکانون را به‌هم وصل می‌کند متقارن است. خط گذرنده ازدوکانون بیضی‌را محور کانونی و عمود منصف آنرا محور ناکانونی بیضی می‌گوئیم .

از آنچه ذکر شد، باتوجه به‌ویژگیهای تقارن، می‌توان نتیجه گرفت که، بیضی نسبت به‌محل تلاقی دومحور، یعنی نسبت به‌وسط فاصلهٔ‌کانونها متقارن است. از معادله بیضی نیزاین ویژگی را می‌توان نتیجه گرفت، زیرا اگر درمعادلهٔ (۳-۱)، x را به $-x$ و y را به $-y$ تبدیل کنیم، در معادله تغییری پدید نمی‌آید یعنی اگر نقطهٔ $M(x , y)$ بر بیضی E واقع باشد ، نقطه $M'(-x , -y)$ قرینهٔ M نسبت به‌مبدأ مختصات نیزبرهمین بیضی واقع است. بنابراین بیضی نسبت به‌مبدأ مختصات (محل تقاطع دومحور) متقارن است .

نقطه O محل تقاطع دو محور بیضی ، یا وسط پاره خط واصل بین دوکانون را مرکز بیضی می‌گوئیم .

اگر در معادلهٔ بیضی $y = 0$ اختیار شود ، $x = \pm a$ بدست می‌آید و نشان می‌دهد که بیضی، محور طولها را در دونقطه به‌طولهای a و $-a$ قطع می‌کند، (نقاط A و A' در شکل ۳ . ۴) این دو نقطه را دو رأس بیضی و چون بر محور کانونی واقعند ، رأسهای کانونی بیضی می‌نامیم .

ازمعادله بیضی می‌توان نتیجه گرفت که طول هرنقطه از بیضی نمی‌تواند ازحیث قدر مطلق بزرگتر از a باشد (یعنی همواره $|x| \leqslant a$). بنابراین رأسهای کانونی نقاطی ازبیضی هستند که طولهای‌آنها ازحیث قدر مطلق از‌طول هرنقطه دیگربیضی بزرگتر است .

اگر درمعادلهٔ بیضی $x = 0$ اختیار شود، $y = \pm b$ بدست می‌آید ونشان می‌دهد که بیضی E محور y ها را دردونقطه‌که نسبت به‌مرکز بیضی قرینه‌اند، قطع می‌کند (نقاط B و B' درشکل ۳.۴)؛ دونقطهٔ B و B' را رأسهای ناکانونی بیضی می‌نامیم .

پاره‌خطهای AA' و BB' را به‌ترتیب قطرهای کانونی و ناکانونی بیضی می گوئیم و از آنچه ذکرشد به‌آسانی‌می‌توان دیدکه $A'A = 2a$ و $B'B = 2b$ است. بنابراین پارامتر b که از رابطهٔ $b^2 = a^2 - c^2$ بدست می‌آید نصف اندازهٔ قطر ناکانونی بیضی است .

هرخط که ازمرکز بیضی بگذرد، بیضی‌را دردونقطه مانند M و M' قطع می‌کند، زیرا اگر معادله خط را $y = mx$ درنظر بگیریم، طولهای نقاط تلاقی آن، با بیضی از معادلهٔ :

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 = a^2b^2$$

یا

$$x^2(b^2 + a^2m^2) = a^2b^2$$

بدست می‌آید واین معادله همواره دارای دوجواب است. (چرا؟).

هرپاره خط MM' راکه ازمرکز بیضی بگذرد و از دو طرف به‌نقاط M و M' واقع بر بیضی محدود باشد، یك‌قطر بیضی می‌نامیم . دیده می‌شودکه :

$$OM^2 = x^2 + y^2 = x^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

یا
$$OM^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 + b^2$$

و از معادلهٔ بیضی نتیجه می‌شود :

$$0 \leqslant x^2 \leqslant a^2$$

در نتیجه
$$0 \leqslant \frac{c^2}{a^2}x^2 \leqslant c^2$$

یا
$$b^2 \leqslant b^2 + \frac{c^2}{a^2}x^2 \leqslant c^2 + b^2$$

یا
$$b^2 \leqslant OM^2 \leqslant a^2$$

وبالاخره
$$b \leqslant OM \leqslant a$$

و از آنجا
$$2b \leqslant MM' \leqslant 2a$$

یعنی هرقطر غیرمشخص بیضی نمی‌تواند بزرگتر از $2a$ وکوچکتر از $2b$ باشد، بنابراین قطرکانونی بزرگترین قطرها و قطر ناکانونی کوچکترین قطرهای بیضی است .

باملاحظه آنکه هرخط گذرنده از مرکز بیضی، آن منحنی را در دونقطه‌که نسبت به‌مرکز بیضی قرینهٔ یکدیگرند قطع می‌کند، می‌توان گفت‌که بیضی یك منحنی بسته است .

۴.۲.۳ــ درون و برون بیضی ـ بیضی یك‌منحنی بسته است و صفحه را به‌سه مجموعه‌که درون و برون و روی بیضی هستند بخش می‌کند. برحسب آنکه نقطه‌ای دردرون یا برون یاروی بیضی باشد، مجموع فاصله‌های آن‌از دوکانون بیضی کوچکتراز یا بزرگتر از یابرابربا $2a$ (مقدار ثابت بیضی) می‌باشد .

تبصره ــ اگر مرکز بیضی به‌اقطار $2a$ و $2b$ نقطهٔ $O_1(\alpha , \beta)$ باشد و قطرهای بیضی به ترتیب بامحورهای خفتها ورستهای دستگاه مختصات‌موازی باشندمعادلهٔ بیضی دردستگاه مختصات قائم مزبور به‌صورت زیر است :

$$\boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1} \qquad (2\text{-}3)$$

مثالــ معادلهٔ بیضی که مرکزش نقطه$O_1(1,2)$ وقطرهای‌کانونی وناکانونی آن‌به‌اندازه‌های ۲۰ و ۱۲ باشند، نسبت به‌دستگاه مختصاتی که محورهایش بـا محورهای‌کانونی‌وناکانونی بیضی موازی باشند به‌صورت زیر است:

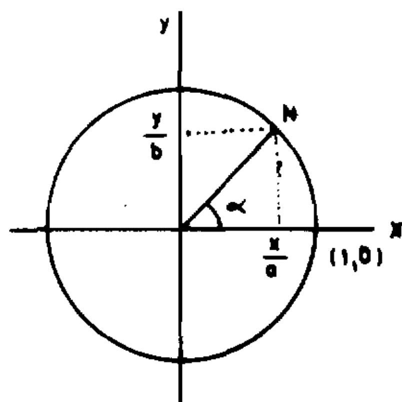
$$\frac{(x-1)^2}{100}+\frac{(y-2)^2}{36}=1$$

معادله‌های پارامتری بیضی ــ از مقایسه برابریهای

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$$

به‌نظـر می‌رسد که شاید $\frac{x}{a}$ و $\frac{y}{b}$ به ترتیب کسینوس و سینوس یك زاویه هستندو بما راهی نشان‌می‌دهد تایك‌دسته معادله پارامتری برای بیضی پیداکنیم . نقطه N به مختصات $(\frac{y}{b}$ و $\frac{x}{a})$ بر دایره بشعاع ۱ قراردارد و اگر α را زاویــه میان oN و ox (درشکل۴.۳) بگیریم، بیدرنگ نتیجه می‌شود که



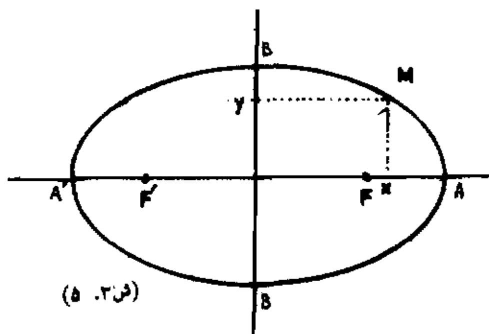
(ش ۳. ۴)

$$\frac{x}{a}=\cos\alpha \quad و \quad \frac{y}{b}=\sin\alpha$$

و ازآنجا معادلات پارامتری‌بیضی بدست‌می‌آیند:

$$x=a\cos\alpha$$
$$y=b\sin\alpha \qquad (۳-۳)$$

وقتی که نقطه $M(x , y)$ یك دور کامل بیضی شکل (۵.۳) را می‌پیماید ، نقطه $N(\frac{x}{a} , \frac{y}{b})$ یك دور کامل دایره شکل (۴.۳) را می‌پیماید و در نتیجه‌برای رسم بیضی‌کافی است$0\leqslant\alpha<2\pi$ باشد .



(ش.۳. ۵)

معادله‌های پـارامتری یك بیضی که مرکز آن (x_0 , y_0) و محورهای بزرگ و کوچك‌آن به‌ترتیب بامحور x هاو محورyها موازی هستند

به‌صورت زیر می‌باشند:

$$(۴-۳)\quad \boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + a\cos\alpha \\ y &= y_0 + b\sin\alpha \end{aligned}} \qquad 0 \leqslant \alpha < 2\pi$$

مثال ۱ — معادله‌های پارامتری بیضی که قطرهای آن ۶ و ۴ باشند در دستگاهی که مبدأش مرکز بیضی و محورهایش برمحورهای بیضی منطبقند به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} \qquad (0 \leqslant \alpha < 2\pi)$$

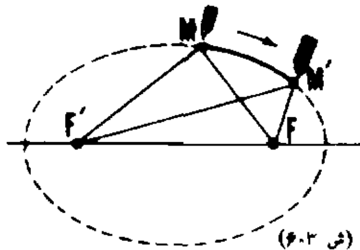
از این معادله‌ها معادله بیضی نسبت به‌دستگاه مختصات قائم به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

مثال ۲ — اگر O_1 (۳ و ۲) مرکز یك بیضی و اقطار آن موازی محورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ و اندازه‌هایشان به‌ترتیب ۱۲ و ۸ باشند، معادله‌های پارامتری بیضی به‌صورت زیرند:

$$\begin{cases} x = 2 + 6\cos\theta \\ \\ y = 3 + 4\sin\theta \end{cases} \qquad (0 \leqslant \theta < 2\pi)$$

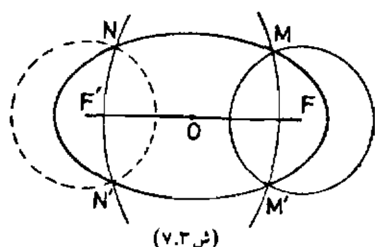
۵.۲.۳ - ترسیم بیضی - اگـر دو نقطهٔ F و F'، کانونها، و عدد a به‌عنوان پارامتر مشخص‌کننده بیضی داده شده باشند ودوسر قطعهٔ ریسمانی‌رادر دو نقطهٔ F و F' چنان ببندیم که در ازای ریسمان‌بین‌آن دو نقطه مساوی $2a$ باشد و آنگاه به‌ترتیبی که در شکل (۶.۳) دیده می‌شود نوك‌قلم را چنان برریسمان‌تکیه‌دهیم که دو قطعهٔ ریسمان که بین نوك قلم و نقاط FوF' قرار



(ش ۶.۳)

می‌گیرند کاملا کشیده ودرامتداد خط راست باشند، نوك قلم نقطه‌ای از بیضی را برصفحهٔ کاغذ مشخص خواهد کرد. اگر درهمین حال نوك قلم را روی صفحه بلغزانیم نقاط مختلف بیضی بدست‌می‌آید و بیضی رسم می‌شود.

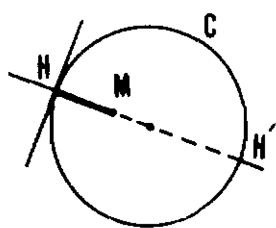
این طریقه را ترسیم بیضی باحرکت‌پیوسته می گوئیم و با ترسیم دایره به‌وسیلهٔ پرگار شباهت دارد. بیضی را به‌طریق دیگر نیز می‌توان رسم کرد به این ترتیب که عدد x کوچکتر از c را در نظر گرفته و بـه مرکـزهای F و F' به ترتیب دو دایـره بـه شعاعهای $a+x$ و $a-x$ رسم می کنیم، این‌دودایره‌یکدیگررا در دو نقطهٔ M و M' قطع می کنند (چـرا ؟) نقطـهٔ M روی بیضی است زیـرا $MF+MF'=2a$. به‌همین دلیل نقطهٔ M' نیز بر بیضی واقع است. روشن است که اگر این‌بار به‌مرکزهای F و F' به ترتیب دو دایره به شعاعهای $a-x$ و $a+x$ رسم کنیم از تقاطع آنها دو نقطهٔ N و N' از بیضی بدست می‌آیند و باعوض‌کردن مقدار x به‌همین ترتیب نقاط دیگر بیضی مشخص میشوند یعنی بـا اختیار هر مقدار x چهار نقطه از بیضی بدست می‌آید . این طریقه رسم بیضی را، رسم بیضی به‌طریق نقطه‌یابی می گوئیم (شکل ۷.۳).



(ش ۷.۳)

۶.۳.۳ ـ دایره‌های هادی بیضی

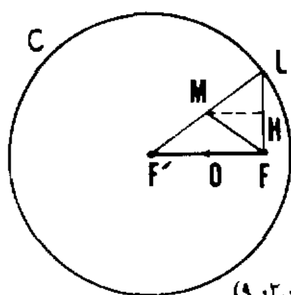
یادآوری ــ هر گاه نقطه‌ای مانند M درصفحهٔ دایره $C(O , R)$ واقع باشد، خط OM دایره را در دو نقطهٔ H و H' قطع می کند(شکل ۸.۳) ثابت می‌شود که یکی از این دو نقطه نزدیکترین نقطه دایره به نقطه M و دیگری دورترین نقطه دایره از آن نقطه‌اند. اگر H نزدیکترین نقطهٔ دایره به‌نقطهٔ M باشد، به موجب تعریف، MH را فاصلهٔ نقطه M ازدایره C می گوئیم.



(ش ۳. ۸)

دایرهٔ هادی بیضی - دایره‌ای را که مرکزش یك کانون بیضی و شعاع آن مساوی قطر بـزرگ بیضی (مقدار ثابت $2a$) باشد، دایره‌هادی‌بیضی نظیر آن‌کانون می گوئیم. هربیضی دارای دو دایـره هادی است که نسبت به‌مرکز بیضی وهمچنین نسبت به‌محور کانونی بیضی قرینه یکدیگرند.

قضیه ــ هر نقطهٔ بیضی از یك‌کانون و از دایره هادی نظیر کانون دیگر به‌یك‌فاصله است وبه‌عکس هر نقطه که از یك کانون بیضی وازدایره هادی‌نظیرکانون‌دیگربه‌یك‌فاصله‌باشد، بربیضی‌واقع‌است.



(ش ۳. ۹)

برهان ــ دو نقطهٔ F و F' را دو کانـون بیضی E و دایـرهٔ $C(F' , 2a)$ را دایرهٔ‌هادی نظیر کانون F' آن فرض می کنیم. (شکل ۹.۳) اگر M نقطه‌ای از بیضی باشد و خط MF' دایرهٔ C رادرنقطهٔ L قطع‌کند، داریم : $F'L=F'M+ML=2a$

از طرفی $MF'+MF=2a$ واز مقایسهٔ این دورابطه‌خواهیم‌داشت

$ML=MF$ که ML فاصلهٔ نقطه M از دایرهٔ هادی نظیرکانون F' است.

به ترتیب‌عکس ، درشکل (۹.۳) می‌توان دیدکه اگر $ML=MF$ باشد وبه دوطرف این تساوی MF' را اضافه‌کنیم خواهیم داشت:

$$MF+MF'=ML+MF'=2a$$

و بنابراین M روی بیضی است.

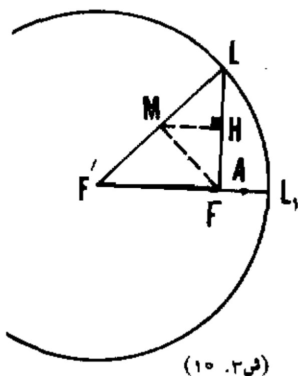
قضیه فوق را بصورت زیر نیز می‌توان بیان‌کرد :

بیضی مکان هندسی مرکز دایره‌ای است که از یك کانون بگذرد وبر دایرهٔهادی نظیر کانون دیگر مماس باشد.

زیرا اگر به‌مرکز M و به‌شعاع MF دایره‌ای رسم کنیم، این دایره بر دایرهٔ C در نقطهٔ L مماس خواهد بود.

و نیز می‌توان گفت :

بیضی مکان هندسی نقطه‌ای است‌که از یك دایره و یك نقطهٔ ثابت واقع دردرون‌آن دایره به یك فاصله باشد .



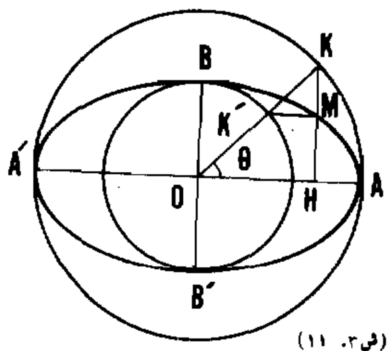
(ش.۳. ۱۰)

مسئله ــ می‌خواهیم با معلوم‌بودن دوکانون‌ومقدار ثابت a بیضی را از طریق نقطه‌یابی رسم کنیم.

حل‌ـ دایره‌هادی‌نظیرکانون F' رارسم کرده‌ونقطهٔ دلخواه L را برآن دایره اختیار می کنیم(شکل ۱۰.۳) عمود منصف LF پاره خط $F'L$ را درنقطهٔ M که‌بر بیضی واقع است قطع‌می‌کند. با تغییردادن جای‌نقطهٔL بر دایرهٔ F' نقاط مختلف بیضی به‌دست می‌آیند.

درصورتی که نقطهٔ L برامتداد $F'F$ اختیارشود، وسط LF که‌یك رأس‌کانونی بیضی‌است مشخص خواهد شد.

۷.۴.۳ ـ دایرهٔ اصلی بیضی ـ بیضی به اقطار $2a$ و $2b$ را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱.۳) دایره‌ای‌که مرکزش مرکز بیضی و شعاع آن مساوی a باشد از دو رأس‌کانونی بیضی می گذرد و درآن نقاط بر بیضی مماس است. این دایره را دایرهٔ اصلی بیضی می گوئیم. همچنین دایرهٔ به مرکز O وبه شعاع bاز دو رأس ناکانونی می گذرد و درهمان نقاط بربیضی مماس می‌شود. این دایره‌راگاهی درارتباط با نامگذاری دایرهٔ



(ش.۳. ۱۱)

اصلی، دایرهٔ فرعی بیضی گفته‌اند.

می‌توان ملاحظه کرد که اگر خطی ازمرکز بیضی بگذرد و دایره‌های مزبور را در نقاط K و K' قطع کند و از این دو نقطه دو خط موازی محورهای ناکانونی و کانونی بیضی رسم کنیم، نقطهٔ تلاقی دو خط مرسوم نقطه‌ای از بیضی است، زیرا اگر M نقطه مزبور باشد، داریم:

$$OH = x_M = OK\cos\alpha = a\cos\alpha$$

$$HM = y_M = OK'\sin\alpha = b\sin\alpha$$

و با در نظر گرفتن معادله‌های پارامتری بیضی، یا از حذف α بین x_M و y_M ملاحظه می‌شود که این نقطه بر بیضی مفروض واقع است. در مثلث OHK (شکل ۱۱۰۳) بنا به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{HM}{HK} = \frac{OK'}{OK} = \frac{b}{a} \qquad \text{(خاصیت مهم دایرهٔ اصلی)}$$

از این طریق نیز می‌توان بیضی را به وسیلهٔ نقطه‌یابی رسم کرد، و این روش ترسیم بیضی زاویهٔ α را در معادله‌های پارامتری بیضی توجیه می‌کند.

۸.۲.۴- خطهای مماس وقائم بر بیضی

معادلهٔ مماس بر بیضی - نقطه $M_\circ|_{y_\circ}^{x_\circ}$ رابر بیضی θ بمعادله $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ یا

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

اختیار می‌کنیم اگر Δ خط مماس بر بیضی درنقطه $M_\circ$ باشد معادله Δ را بااستفاده ازآنکه ضریب زاویه خط مماس برمنحنی درهرنقطه بامشتق تابع بازای مختصات نقطه تماس برابراست می‌توان تعیین کرد. دراین‌مورد از معادله بیضی میتوان نوشت :

$$2b^2x+2a^2yy'=0$$

و از این‌معادله ضریب‌زاویه مماس بر بیضی درنقطه $M_\circ$ بصورت زیربدست می‌آید.

$$m_\Delta = \frac{-b^2x_\circ}{a^2y_\circ}$$

بنابراین معادله خط مماس بصورت زیر است:

$$\Delta : y-y_\circ = \frac{-b^2x_\circ}{a^2y_\circ}(x-x_\circ)$$

و بالاخره معادلهٔ مماس در نقطهٔ $M_\circ$ بر بیضی در دستگاه مختصات قائم بصورت زیر مشخص می‌شود :

$$b^2x_\circ x+a_2y_\circ y=a^2y_\circ^2+b^2x_\circ^2$$

و چون نقطهٔ M_0 بر بیضی واقع است داریم:

$$a^2y_0^2+b^2x_0^2=a^2b^2$$

و درنتیجه خواهیم داشت :

$$b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$$

و پس‌از تقسیم طرفین معادله‌بر a^2b^2

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y=1 \qquad (۵-۳)$$

معادلهٔ قائم بر بیضی - قائم برهرمنحنی دریك‌نقطه ازآن منحنی، برخط مماس درهمان نقطه‌عمود است؛ بنابراین اگرخط Δ_1 قائم بربیضی مفروض E درنقطهٔ M_0 باشد، داریم :

$$m\Delta_1=-\frac{1}{m_\Delta}=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$$

و معادلهٔ Δ_1 به‌صورت زیر بدست می‌آید :

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

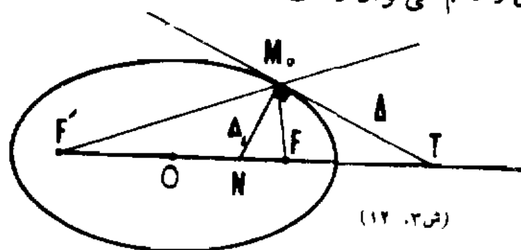
یا

$$a^2y_0x-b^2x_0y=(a^2-b^2)x_0y_0$$

و پس‌از تقسیم طرفین معادله‌بر x_0y_0 وباملاحظه آنکه $a^2-b^2=c^2$ است، صورت‌کلی معادله خط قائم بربیضی درنقطه $M_0(x_0 ، y_0)$ به‌صورت زیر است :

$$\frac{a^2}{x_0}x-\frac{b^2}{y_0}y=c^2 \qquad (۶-۳)$$

اگر مماس و قائم بربیضی درنقطه مفروض M_0 محورکانونی را به‌ترتیب درنقاط T و N قطع‌کنند (شکل ۱۲.۳)، از معادله‌های مماس و قائم می‌توان داشت :



(ش.۳، ۱۲)

$$\overline{OT}=\frac{a^2}{x_0}$$

$$\overline{ON}=\frac{c^2x_0}{a^2}$$

در نتیجه

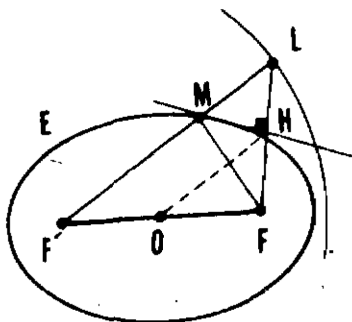
$$\overline{OT}\cdot\overline{ON}=c^2=\overline{OF}^2=\overline{OF'}^2$$

این رابطه نشان می‌دهد که دونقطهٔ T و N پاره خط $F'F$ را به‌نسبت توافقی تقسیم می‌کنند .

و چون دوخط $M_\circ T$ و $M_\circ N$ برهم عمودند، لزوماً نیمسازهای زاویه‌های حادث بین‌دوخط $M_\circ F$ و $M_\circ F'$ می‌باشند و از اینجا ویژگی مهم زیر از بیضی اثبات می‌شود :

قضیهـ خطهای مماس و قائم در هر نقطه از بیضی زاویه‌های بین شعاعهای حامل نقطهٔ تماس را نصف می‌کنند .

نقطه M را بر بیضی مفروض E به‌کانونهای F' و F وقطرکانونی $2a$ در نظر می گیریم (شکل ۱۳.۳). اگرخط $F'M$ دایره هادی نظیرکانون F' رادرنقطه L قطع کرده باشد، به‌موجب آنچه اثبات شد عمود منصف LF از نقطهٔ M می‌گذرد و زاویهٔ LMF را نصف می‌کند ؛ بنابراین بربیضی مماس است .



(ش.۳. ۱۳)

از اینجا می‌توان نتیجه‌گرفت :

قضیه ـقرینهٔ هرکانون بیضی نسبت‌به خط مماس بر بیضی بر دایره هادی نظیر کانون دیگر واقع است ؛ به عکس.

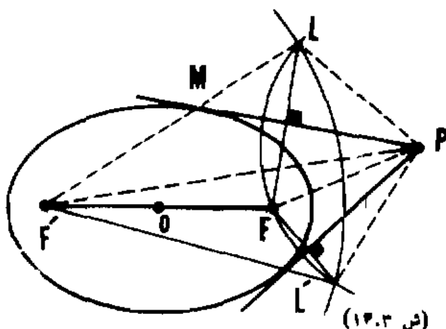
اگـر H وسط پاره خط FL و O وسط FF' (مرکز بیضی) باشد، و بنابراین: $OH = \frac{F'L}{2} = a$

قضیهـ تصویر هرکانون بیضی روی خط مماس بر بیضی، بر دایره اصلی بیضی واقع است.

رسم مماس بربیضی

الفـ **رسم مماس بربیضی از یك نقطه** - اگر نقطهٔ P بربیضی واقـع باشد، نیمساز زاویهٔ برونی بین شعاعهای حامل نقطهٔ P همان خطی است که درنقطهٔ P بربیضی مماس است .

چنانچه نقطهٔ مفروض P بر بیضی واقع نباشد، برای ترسیم مماس ملاحظه می کنیم که نقطهٔ L قرینهٔ کانون F نسبت به‌مماس مطلوب ازیك طرف بردایرهٔ هادی نظیر کانون F' واقع است و از طرفی بردایره‌ای است‌که به‌مرکز P و به‌شعاع PF رسم می‌شود. بنابراین دایرهٔ به‌مرکز P و به‌شعاع PF دایـرهٔ هادی نظیر کانون F' را درنقطهٔ L قطع می کند و پس‌از مشخص شدن نقطهٔ L عمود ـ منصف FL را که همان مماس مطلوب است، می‌تـوان رسم کرد (شکل ۱۴.۳).برحسب‌آن‌که دایـرهٔ بمرکز P و به‌شعاع PF بادایرهٔ هادی نظیرکانون F' متقاطع بوده یا برآن مماس شود ویاآن‌که با دایرهٔ هادی هیچ نقطهٔ مشترك نداشته باشد، مسئله دارای دو یا یك‌جواب بوده و یاآن‌که جواب ندارد .



(ش ۱۴.۳)

برای آن‌که دو دایرهٔ مذکور متقاطع باشند لازم است که رسم مثلث $PF'L$ با معلوم بودن سه‌ضلع PF' و $PL=PF$ و $F'L=2a$ میسر باشد، و رسم این مثلث درصورتی ممکن است که هرضلع آن کوچکتر از مجموع دوضلع دیگر باشد، یعنی باید نامساویهای زیر توأماً برقرار باشند :

$$2a \leqslant PF+PF' \quad (1)$$

$$PF \leqslant PF'+2a \quad (2)$$

$$PF' \leqslant PF+2a \quad (3)$$

اما درمثلث PFF' همواره داریم:

$$PF \leqslant PF'+2c$$

$$PF' \leqslant PF+2c$$

و چون دربیضی همیشه داریم : $2a>2c$، نامساویهای (۲) و (۳) همواره برقرارند و بنابراین شرط امکان مسئله منجر به‌این می‌شود که داشته باشیم :

$$PF+PF' \geqslant 2a$$

و از نامساوی اخیر معلوم می‌شود که نقطهٔ P باید دربرون بیضی یا روی بیضی واقع باشد .

اگر نقطهٔ P دربرون بیضی باشد، مسئله دارای دوجواب است .

چنانچه P روی بیضی باشد، دودایرهٔ مذکور برهم‌مماس می‌شوند و چنانکه قبلا نیزدیدیم مسئله دارای یک‌جواب است .

هرگاه P دردرون بیضی باشد، مسئله جواب ندارد .

ب ــ رسم مماس به‌موازات امتداد معین ــ اگر امتداد Δ و بیضی E به‌کانونهای F و F' و مقدار ثابت $2a$ مفروض باشند، (شکل ۱۵.۳)، برای رسم مماس موازی Δ بر بیضی ملاحظه می‌کنیم که قرینه کانون F نسبت به‌مماس مطلوب، بردایرهٔ هادی نظیرکانون F' واقع است امابرای تعیین قرینهٔ کانون F نسبت به‌مماس باید از نقطهٔ F برخط مماس عمود رسم کنیم و این عمود بر خط Δ نیزعمود است، پس‌اگر ازنقطه F عمودی برخط Δ رسم کنیم و این عمود دایرهٔ هادی‌کانون F' رادرنقطهٔ L قطع کند، خط D عمود منصف پاره خط FL جواب مسئله است .

(ش ۱۵.۳)

خطی که از نقطهٔ F بر امتداد Δ عمود رسم می‌شود دایرهٔ هادی کانون F' را در دو نقطه قطع می‌کند (چرا؟) بنابراین مسئله همواره دو جواب دارد.

برای حل این مسئله ازویژگی دیگر خط مماس نیز می‌توان استفاده کرد، زیرا خطی که از کانون F برخط Δ و درنتیجه برخط مماس عمود باشد، مماس را درنقطه‌ای واقع بردایرهٔ اصلی قطع می‌کند. بنابراین اگر عمود مرسوم ازنقطهٔ F برامتداد Δ دایرهٔ اصلی را درنقطهٔ H قطع کند، خطی که درنقطه H بر FH عمود شود بر بیضی مماس خواهد بود. از این‌روش ترسیم نیز می‌توان نتیجه گرفت که مسئله همواره دوجواب دارد.

درنتیجه می‌توان گفت:

بر بیضی مفروض به‌موازات هرامتداد همواره دو مماس می‌توان رسم کرد. به‌آسانی ثابت می‌شود که مماسهای مزبور نسبت به‌مرکز بیضی قرینهٔ یکدیگرند.

این موضوع را با روش تحلیلی نیز به سادگی می‌توان ثابت کرد. زیرا اگر معادلهٔ بیضی را بصورت $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ در نظرگرفته و خط Δ را با ضریب زاویه‌ای m فرض کنیم، معادلهٔ هر خط D موازی با Δ بصورت $y=mx+\lambda$ خواهد بود و پارامتر λ را چنان باید حساب کنیم که خط D بر بیضی مماس باشد. اما طولهای نقاط تلاقی خط D با بیضی جوابهای معادله‌های زیرند:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$y=mx+\lambda$$

از این معادله‌ها معادله درجه دوم:

$$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2m\lambda x+a^2\lambda^2-a^2b^2=0 \qquad (E)$$

حاصل می‌شود و برای اینکه خط D بر بیضی مماس باشد، لازم است λ را چنان تعیین کنیم که مبین معادلهٔ (E) مساوی صفر باشد یعنی:

$$\Delta=a^4m^2\lambda^2-a^2(\lambda^2-b^2)(b^2+a^2m^2)$$
$$=a^2(a^2b^2m^2+b^4-b^2\lambda^2)=0$$

از این رابطه $\lambda^2=a^2m^2+b^2$ حاصل می‌شودودیده‌می‌شود که به‌ازای هرمقدار m برای λ دومقدار حقیقی بدست‌می‌آید یعنی به‌موازات هرامتداد با ضریب زاویه‌ای m دوخط‌مماس بر بیضی‌وجوددارد.

یادداشت - ثابت می‌شود که مقدار S مساحت بیضی به اقطار $2a$ و $2b$ از دستور:

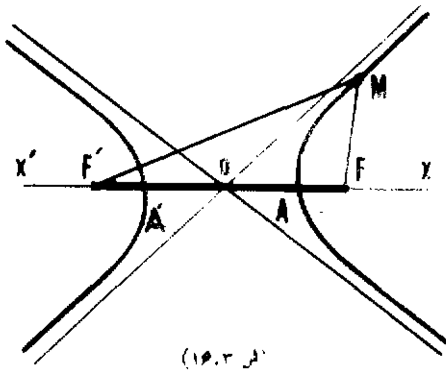
$$\boxed{S=\pi ab} \qquad (۷-۳)$$

به‌دست می‌آید.

(۳-۳) ـ هذلولی

۱.۳.۳ــ تعریف ـ هذلولی مکان هندسی نقطه‌هائی از یک‌صفحه‌است که قدر مطلق‌تفاضل فاصله‌های هریك ازآنها ازدونقطهٔ ثابت‌صفحه مقداری ثابت است و این مقدار ثـابت کوچکتر از فاصلهٔ دو نقطهٔ ثابت است.

در هذلولی هریك از دو نقطهٔ ثابت را یك کانون و فاصلهٔ آنها را فاصلهٔ کانونی و تفاضل فاصله‌های هرنقطهٔ هذلولی را ازکانونها مقدارثابت هذلولی می‌نامیم.



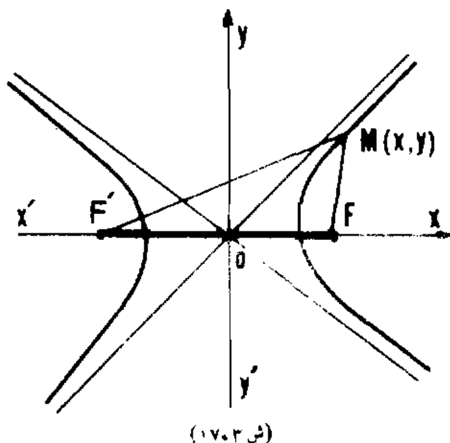
(ش ۱۶.۳)

معمولا کانونهای هذلولی را بـا F و F' و فاصلهٔ‌کانونها را با $2c$ و مقدار ثابت را با $2a$ نمایش میدهیم (شکل ۱۶.۳) .

هرگاه M نقطه‌ای از هـذلولی بـاشد ، $MF' - MF = \pm 2a$ است که درآن $2a$ همان مقدار ثابت هذلولی است.

در هـذلولی نیز ، مـانند بیضی ، نسبت $\frac{c}{a}$ را خروج ازمرکزهذلولی‌می‌نامیم‌وبنا به‌تعریف‌هذلولی $\frac{c}{a} > 1$ است. به‌آسانی می‌توانددید که هرقدر $\frac{c}{a}$ کوچکتر باشد نقطهٔ M به‌عمود منصف $F'F$ نزدیکتر خواهد بود وهـرچه $\frac{c}{a}$ بـه ۱ نزدیکتر باشد هذلولی به دونیم خط Fx و $F'x'$ نزدیکتر می‌باشد.

می‌توان دید که هذلولی نیز نسبت به خط $F'F$ که از دو کانون‌آن می‌گذردوهم‌چنین‌نسبت به عمود منصف پاره خط $F'F$ و در نتیجه نسبت به نقطهٔ O وسط این پاره خط متقارن است.



(ش ۱۷.۳)

۲.۳.۳ ـ معادلهٔ هذلولی ـ دستگـاه مختصات قائم xOy را چنان اختیار می‌کنیم که نقطهٔ O بر وسط $F'F$ و محور Ox برخط $F'F$ منطبق و محور Oy عمود منصف پاره خط $F'F$ بـاشد (شکل ۱۷.۳) در ایـن صورت نسبت به دستگاه مختصات مـزبور $F(c , 0)$ و $F'(-c , 0)$ است و اگر نقطهٔ $M(x , y)$ نقطه‌ای ازهذلولی مفروض باشد، به موجب تعریف داریم:

$$(1) \qquad MF' - MF = \pm 2a$$

اما

$$(2) \qquad MF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(3) \qquad MF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

واگر این عبارات را در تساوی (۱) قرار دهیم رابطه بین مختصات هر نقطهٔ شکل به‌صورت زیر بدست می‌آید :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

برای تبدیل معادله به‌صورت کلی وسادهٔ‌آن، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

و چون هریك از عبارات دو طرف را به‌توان ۲ برسانیم برابریهایی

$$4cx - 4a^2 = \pm 2a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

بدست می‌آید که چون دو عبارت طرفین را مربع کرده و$c^2 - a^2 = b^2$ در نظربگیریم، باروشی مشابه آنچه در بیضی ارائه شد معادلهٔ هذلولی نسبت به دستگاه مختصات منطبق بر محورهای آن به‌صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$(8-3) \qquad \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

هرگاه دستگاه مختصات با محورهای هذلولی موازی و اما مبدأ مختصات بر وسط $F'F$ منطبق نباشد و نقطه $O_1(\alpha , \beta)$ وسط $F'F$ باشد، معادلهٔ هذلولی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$(9-3) \qquad \boxed{\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1}$$

تبصره ــ اگر در تعیین معادلهٔ هذلولی محور طولها را بـر عمود منصف $F'F$ و محور عرضها را برخط $F'F$ اختیارکنیم، معادله هذلولی به‌صورت زیر خواهد بود :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

۳.۳.۳ ـ محورها، مرکز، رأسها وقطرهای هذلولی ـ از معادلهٔ‌هذلولی (به‌صورت ۸.۳)به‌ازای $y = 0$ دو مقدار $x = a$ و $x = -a$ بدست می‌آیند و نشان می‌دهند که هذلولی محورxها را

در دونقطه A و A' به‌طولهای مذکور قطع می‌کند. نقاط A و A' مزبور را رأسها و پاره خط AA' را قطر کانونی یا قطر حقیقی هذلولی می‌گوئیم. همانطورکه در مورد بیضی ذکرشد، در هذلولی نیز وقتی x را به $-x$ تبدیل کنیم و y ثابت باشد، معادله تغییر نمی‌کند واین موضوع نشان می‌دهدکه هذلولی‌نسبت به محور $y'y$ متقارن است و به‌همین ترتیب‌ثابت‌می‌شودکه‌هذلولی نسبت به محور $x'x$ تقارن دارد وسرانجام نتیجه می‌گیریم که هذلولی نسبت به‌نقطه O وسط $F'F$ متقارن است.

خط FF' را که بر دوکانون‌هذلولی می‌گذرد محور کانونی وعمود منصف‌آنرا محورناکانونی و نقطهٔ O وسط $F'F$ را مرکز هذلولی می‌گوئیم.

بطوریکه ذکر شد نقاط $A(a , o)$ و $A'(-a , o)$ از هذلولی برمحور کانونی واقعند و از این روی پاره‌خط $A'A = 2a$ راکه‌برمحور کانونی است، قطر کانونی‌هذلولی می‌گوئیم. با توجه به‌آنکه در معادلهٔ هذلولی $b^2 = c^2 - a^2$ است می‌توان دید که اگر $x = o$ باشد، مقادیر y که از معادلهٔ هذلولی بدست می‌آیند حقیقی نیستند و این موضوع نشان می‌دهد که منحنی با محور y ها نقطه‌مشترکی‌ندارد، ضمناً از دو قسمت جدا ازهم پدید می‌آیدکه هر یك از آنها دریك‌طرف‌محور $y'y$ است. باتوجه به‌اهمیت پارامتر b در وضع منحنی نقاط B و B' به عرضهای b و $-b$ واقع برمحور $y'y$ گاهی رأسهای غیرحقیقی هذلولی و پاره خط $B'B$ که دونقطهٔ مزبور رابه‌هم وصل می‌کند، قطر غیر حقیقی هذلولی نامیده می‌شود.

۴.۳.۴ درون وبرون هذلولی - گرچه هذلولی یك منحنی بسته نیست ولی به تقلید از بیضی می‌توان برای‌هذلولی‌هم درون وبرون‌آنرا تعریف‌کرد. هرهذلولی‌صفحه را به‌سه‌ناحیه‌درون، برون و روی‌آن بخش می‌کند. نقطه‌ای در درون ، در برون یاروی هذلولی قرار دارد هرگاه قدر مطلق تفاضل فاصله‌های آن از دوکانون هذلولی به‌ترتیب بزرگتر از، کوچکتر از یابرابر با $2a$ باشد.

(تمرین : یك هذلولی بکشید و این ناحیه‌ها را مشخص کنید.)

۵.۳.۴ - مجانبهای هذلولی - ازحل y برحسب x درمعادله

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نتیجه می‌شودکه :

$$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$

و می‌بینیم هنگامی‌که x به $+\infty$ می‌گراید روی یکی از شاخه‌های هذلولی y به $+\infty$ وروی

دیگری y به $-\infty$ می‌گراید. همچنین وقتی‌که x به $-\infty$ می‌گرایدروی‌یکی‌ازشاخه‌ها y به $+\infty$ و روی دیگری y به $-\infty$ می‌گراید. پس هرهذلولی چهارشاخه بی‌کران داردکه روی‌آنها قدر مطلقهای x و y به ∞ می‌گرایند.

یکی‌از شاخه‌ها مثلا آنکه به $(+\infty,+\infty)$ می‌رود درنظر می‌گیریم، معادله خط مجانب بر این شاخه به‌صورت $y=\frac{b}{a}x$ می‌باشد. با محاسبه مجانبهای سایر شاخه‌ها به نتیجه‌های زیر می‌رسیم:

(الف) خط $y=\frac{b}{a}x$ مجانب دوشاخه $(+\infty,+\infty)$ و $(-\infty,-\infty)$ می‌باشد

(ب) خط $y=-\frac{b}{a}x$ مجانب‌دوشاخه $(-\infty,+\infty)$ و $(+\infty,-\infty)$ می‌باشد.

درحالتی‌که مرکز هذلولی نسبت به دستگاه مختصات قائم نقطهٔ $O_1(\alpha , \beta)$ وهذلولی به اقطار $2a$ و $2b$ باشد، مجانبهای هذلولی دارای معادله‌هائی به‌صورت‌های زیر می‌باشند:

$$y-\beta=\pm\frac{b}{a}(x-\alpha) \qquad (10-3)$$

مثال ۱ - معادله‌های مجانبهای هذلولی بمعادلهٔ:

$$\frac{x^2}{9}-y^2=1$$

به‌این صورتند:

$$y=\pm\frac{1}{3}x$$

مثال ۲ - هذلولی بمعادلهٔ:

$$(x-1)^2-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

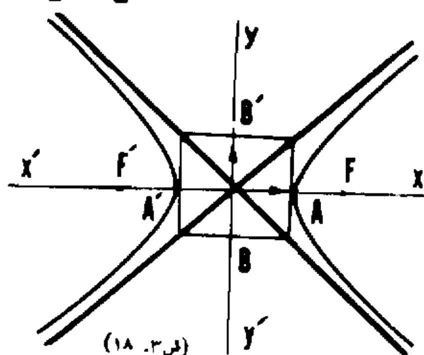
دارای مجانبهای زیر است:

$$y-1=\pm2(x-1)$$

یا

$$y=2x-1$$
$$y=-2x+3$$

۶.۳.۴ــ هذلولی متساوی‌القطرین ـ چنانکه دیدیم درهذلولی اندازه‌های دوقطر $2a$ و $2b$ هستند و به‌آسانی می‌توان دیدکه اگر مستطیلی چنان بنا کنیم که مرکزآن، مرکز هذلولی‌واضلاع آن موازی بامحورهای هذلولی و آنکه موازی محورکانونی است به‌اندازهٔ $2a$ وآنکه موازی محور ناکانونی است‌به‌اندازهٔ $2b$ باشد، امتدادقطرهای این‌مستطیل بضریبهای‌زاویه‌ای $\frac{b}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ هستند وامتدادهای دومجانب هذلولی را مشخص می‌کنند. حال اگر دریك هذلولی $a=b$ باشد، مستطیل مزبور بمربع تبدیل می‌شود و مجانب‌های آن بریکدیگر عمودند. این‌گونه هذلولی را متساوی القطرین (و گاهی متساوی‌الساقین) گفته‌اند، (شکل ۱۸.۳).



(ش. ۳. ۱۸)

از رابطهٔ $c^2-a^2=b^2$ می‌توان دیدکه هر گاه درهذلولی $a=b$ باشد، $c^2=2a^2$ و درنتیجه $c=a\sqrt{2}$ است و دراین صورت معادلهٔ هذلولی بصورتهای سادهٔ

$$x^2-y^2=a^2$$

و یا

$$x^2-y^2=\frac{c^2}{2}$$

نوشته می‌شود .

مثالــ معادلهٔ $x^2-y^2=1$ ساده‌ترین هذلولی متساوی‌القطرین راکه محورهای آن بر محورهای طولها و عرضها ازصفحهٔ مختصات منطبق و مرکزآن برمبدأ مختصات واقع است مشخص می‌کند .

۷.۳.۴ـ دایره‌های هادی هذلولی ــ درهذلولی‌نیز هردایره‌که مرکزآن یکی‌از دوکانون وشعاع آن $2a$ (اندازهٔ قطر کانونی یا عدد ثابت هذلولی) باشد، دایره هادی نظیر آن کانون هذلولی نامیده می‌شود. بنابراین هرهذلولی دارای دو دایرهٔ هادی است‌که نسبت بمحور ناکانونی و همچنین نسبت بمرکز هذلولی قرینه یکدیگرند.

قضیه ــ هرنقطهٔ هذلولی ازیك کانون و دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر به یك فاصله است و به عکس، هرنقطهٔ صفحه‌که ازیك کانون هذلولی و دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر آن به‌یك فاصله باشد، بر هذلولی واقع است .

برهان ـ درشکل(۱۹.۳) هر گاه M نقطه‌ای ازهذلولی مفروض و $C'(F' , 2a)$ دایره هادی نظیر کانون F' ازهذلولی و L نقطهٔ تلاقی پاره‌خط MF' با دایرهٔ C' باشد، به‌موجب تعریف هذلولی

$$MF'-MF=2a$$

از طرفی L بر دایرهٔ هادی C' واقع است و بنابراین داریم :

$$F'L=MF'-ML=2a$$

ازمقایسهٔ این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$ML=MF$$

(ش ۱۹.۳)

بـه عکس، در شکـل (۱۹.۳) چنانچه $ML=MF$ بـاشد، این تساوی رامی‌توان به $MF'-ML=MF'-MF$ تبدیل کـرد کـه چون $MF'-ML=F'L=2a$ است، $MF'-MF=2a$ واین رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ M برهذلولی مفروض واقع است .

از اینجا می‌توان گفت:

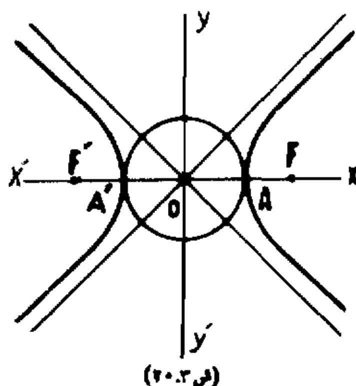
قضیه ـ هذلولی مکان هندسی مراکز دایره‌هائی‌است‌که ازیك کانون بگذرند و بردایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر مماس باشند .

و ازاین ویژگی، تعریف دیگری به‌صورت زیر برای هذلولی می‌توان داشت :

هذلولی مکان هندسی نقطه‌هایی است‌که ازیك دایره و از یك نقطهٔ ثابت واقع در برون آن دایره به‌یك فاصله باشند .

با استفاده ازاین ویژگی، هذلولی را به‌کمك دایره هادی بامعلوم بودن a و c از طـریق نقطه‌یابی می‌توان رسم کرد. روش تعیین نقطه‌ها عیناً همان است‌که درمورد بیضی ذکرشد .

۸.۳.۳ـ دایرهٔ اصلی هذلولی ـ دایره‌ای را که مرکزش مرکز هذلولی و شعاع آن نصف قطـر کانونی بـاشد، دایرهٔاصلی هـذلولی می‌گوئیم (شکل ۲۰.۳)



(ش ۲۰.۳)

روشن است‌که دایـرهٔ اصلی از دو رأس کانونی هذلولی می‌گـذرد و در آن نقطه‌ها بـر هذلولی مماس است.

۹.۳.۳- خطهای مماس وقائم برهذلولی ـ هرگاه نقطهٔ $M_0(x_0 , y_0)$ را بر هذلولی H به معادلهٔ :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

اختیارکنیم و فرض‌کنیم خط D دراین‌نقطه برهذلولی مماس است، معادلهٔ D با روشی‌که درمورد بیضی دیدیم ، بصورت :

$$(۱۱-۳) \quad D: \quad \boxed{\frac{x_0}{a^2}x - \frac{y_0}{b^2}y = 1}$$

بدست میآید .

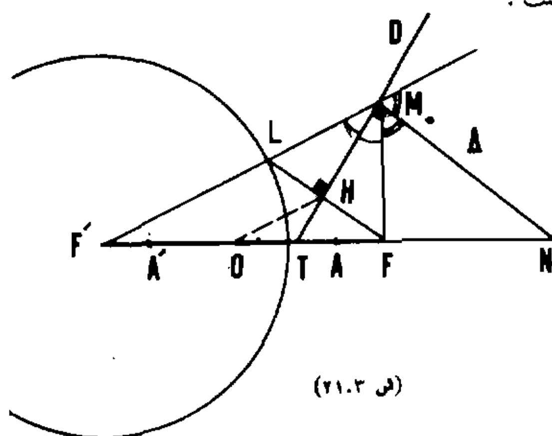
از طرفی می‌دانیم‌که اگر خط Δ درنقطهٔ M_0 برخط D عمود باشد داریم :

$$m_\Delta = -\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$$

پس‌معادلهٔ قائم برمنحنی درنقطهٔ M_0 به‌صورت زیر بدست میآید :

$$(۱۲-۳) \quad \Delta: \quad \boxed{\frac{a^2}{x_0}x + \frac{b^2}{y_0}y = c^2}$$

نتیجه- هرگاه T و N نقاط تقاطع مماس و قائم نقطهٔ M_0 با محورکانونی هذلولی باشند (شکل ۲۱.۳)، از معادله‌های فوق می‌توان داشت :



(ش ۲۱.۳)

$$\overline{ON} = \frac{c^2x_0}{a^2} \quad \text{و} \quad \overline{OT} = \frac{a^2}{x_0}$$

و ازاین دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$\overline{OT} \cdot \overline{ON} = c^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OF'}^2$$

و این تساوی نشان می‌دهد که نقاط T و N پاره خط $F'F$ را به‌نسبت توافقی تقسیم می‌کنند وچون دو خط M_0T و M_0N بریکدیگر عمودند، زاویه‌های بین دوشعاع حامل را نصف می‌کنند. یعنی :

قضیه- خطوط مماس و قائم در هرنقطه از هذلولی زاویه‌های بین‌شعاعهای حامل‌آن نقطه را نصف می‌کنند .

با استفاده ازاین ویژگی مماس و قائم، قضیه‌های زیر را می‌توان ثابت‌کرد .

قضیهٔ ۱ - قرینهٔ هرکانون هذلولی نسبت به هرخط مماس بر آن، بردایره هادی نظیر کانون دیگر واقع است .

قضیهٔ ۲ - تصویرهرکانون هذلولی برهرخط مماس برآن منحنی، بردایرهٔ اصلی واقع است.

برهان ـ هرگاه خط D در نقطهٔ M برهذلولی H به‌کانونهای F و F' و به‌قطر کانونی $A'A$ مماس باشد، پاره خط $F'M$ دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را در نقطهٔ L قطع می‌کند و $MF = ML$ (شکل ۲۲.۳) ازطرفی مماس D نیمساززاویهٔ $F'MF$ است بنابراین برخط FL عمود است وآن پاره خط رانصف می‌کند، یعنی قرینهٔ کانون F نسبت به‌مماس D بر دایرهٔ هادی نظیرکانون F' واقع است.

(شکل ۲۲.۳)

اگرنقطهٔ O' وسط LF رابه‌نقطهٔ O وسط $F'F$ وصل‌کنیم، داریم:

$$OO' = \frac{F'L}{۲} = a$$

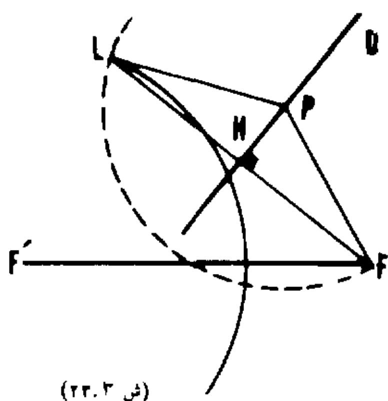
یعنی نقطهٔ O' تصویرکانون F برخط مماس روی دایرهٔ اصلی هذلولی واقع است.

مسئلهٔ۱ـ می‌خواهیم در نقطهٔ M واقع برهذلولی مفروض خطی مماس برآن رسم‌کنیم.

حل ـ باتوجه به‌آنچه اثبات شد، اگرنقطهٔ مزبور رابه‌کانونهای هذلولی وصل‌کنیم، نیمساز زاویهٔ بین‌شعاعهای حامل‌آن نقطه مماس مطلوب است.

مسئلهٔ۲ـ می‌خواهیم ازیك نقطه‌که برهذلولی واقع نیست خطی برآن مماس‌کنیم.

حل‌ـ باتوجه به‌آنکه قرینهٔ کانون F نسبت به خط مماس بردایرهٔ هادی نظیرکانون دیگر واقع است، بمرکز P و شعاع PF دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ اگر این دایره دایرهٔ هادی نظیر کانون F' را درنقطهٔ L قطع‌کند، نیمساز زاویهٔ LPF بر هذلولی مماس است (شکل ۲۳.۳)، برحسب آنکه دایرهٔ به‌مرکز P و به‌شعاع PF بادایرهٔ هادی نظیرکانون F' متقاطع بوده یابرآن مماس شود و یا آن‌که بـا دایرهٔ هادی هیچ نقطهٔ مشترك نداشته باشد، مسئله دارای دو یایك‌جواب است و یا آن‌که جواب ندارد.



(ش ۲۳.۳)

برای‌آن که دودایرهٔ مذکور متقاطع باشند لازم است که‌رسم مثلث $PF'L$ با معلوم بودن سه ضلع PF' و $PL = PF$ و $F'L = ۲a$ میسر باشد، و رسم این مثلث درصورتی ممکن‌است

که هرضلع آن کوچکتر ازمجموع دوضلع دیگر باشد، یعنی باید نامساویهای زیر توأماً برقرار باشند :

$$(۱) \qquad ۲a \leqslant PF + PF'$$
$$(۲) \qquad PF \leqslant PF' + ۲a$$
$$(۳) \qquad PF' \leqslant PF + ۲a$$

اما در مثلث PFF' همواره داریم:

$$۲c \leqslant PF + PF'$$

وچون در هذلولی همیشه داریم $۲a < ۲c$، نامساوی (۱) مطمئناً همواره برقرار است.

در بارهٔ نامساویهای (۲) و (۳)، می‌توان آنها را به‌صورتهای زیر نوشت:

$$۲a \geqslant PF - PF'$$
$$۲a \geqslant PF' - PF$$

و هر دو نامساوی اخیر، اگر قدر مطلق طرفهای دوم آنها رادرنظر بگیریم ، این معنی را می‌رسانند که نقطهٔ P باید دربرون هذلولی ویا آنکه روی هذلولی واقع باشد.

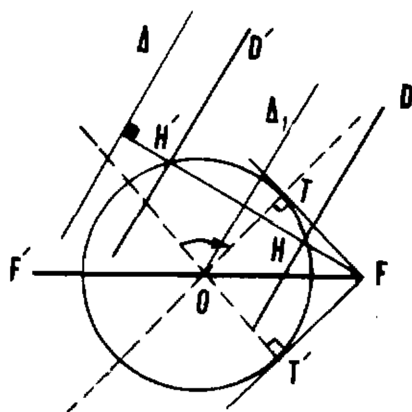
اگر p دربرون هذلولی باشد، مسئله دارای دو جواب است.

چنانچه P روی هذلولی باشد،نقطهٔ L روی PF' خواهد بود و دو دایره بریکدیگر مماس می‌شوند و چنانکه قبلا نیز دیدیم مسئله یك جواب دارد.

هرگاه P در برون هذلولی باشد، مسئله جواب ندارد.

مسئله ۳ــ می‌خواهیم برهذلولی مفروض مماسی موازی امتداد معین Δ رسم کنیم .

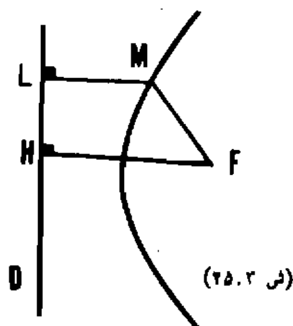
حل ــ با توجه به‌آنکه تصویر هر کانون هذلولی برخط مماس بر دایرهٔ اصلی واقع‌است، از نقطهٔ F خطی بر امتداد Δ عمود رسم می‌کنیم (شکل ۲۴.۳) . اگر این عمود دایرهٔ اصلی‌را در نقطهٔ H قطع‌کند، خطی‌که از نقطهٔ H موازی Δ رسم شود، برهذلولی مماس است.



(ش ۲۴.۳)

شرط وجود جواب‌آن است‌که عمودی که از نقطهٔ F برامتداد Δ رسم می‌کنیم دایرهٔ اصلی را قطع کند و لازمهٔ این امر آن است که عمود

مرسوم در درون زاویهٔ TFT' باشد که بین دو مماس مرسوم ازکانون F بردایره اصلی پدیدمی‌آید اما OT و OT' امتدادهای مجانبهای هذلولی را مشخص می‌کنند (چرا ؟)، بنابراین‌شرط وجود جواب‌آن‌است که‌خط Δ_1 که‌از مرکزهذلولی موازی Δ رسم می‌شود در برون هذلولی واقع شود و در این‌صورت مسئله دو جواب دارد.



(ش ۲۵.۳)

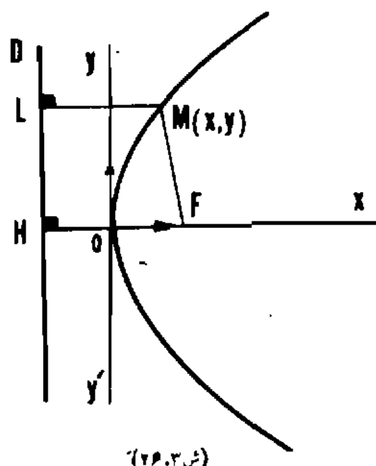
(۴-۳)- سهمی

۱.۴.۳ - تعریف — سهمی مکان هندسی نقاطی است از صفحه‌که از یك نقطهٔ ثابت و یك خط ثابت واقع برآن صفحه به یك فاصله باشند و نقطه ثابت روی خط ثابت نباشد.

خط ثابت D را هادی ونقطهٔ ثابت F را کانون و فاصلهٔ کانون را از خط هـادی پارامتر سهمی گوئیم. (شکل ۲۵.۳).

پارامتر سهمی‌را معمولا باحرف p نمایش‌می‌دهیم.

از نظر هندسی وقتی‌که کانون و خط هادی داده شده باشند. سهمی مشخص است. در سهمی نیز پاره خطی‌که یك‌نقطهٔ منحنی را به کانون وصل می‌کند شعاع حامل آن نقطه نامیده می‌شود.



(ش ۲۶.۳)

۲.۴.۳ - معادله سهمی — سهمی به‌کانون F و خط هـادی D را در نظر می گیریم. از F خطی بر D عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. وسط HF را مبدأ مختصات‌وامتداد HF راامتداد محور xهاوجهت‌از Oبه F را جهت‌مثبت‌می گیریم و محور yها را بگونه مناسبی اختیار می‌کنیم. اینك ازنقطه‌دلخواه $M(x, y)$ روی‌سهمی‌پاره خط ML رابر D عمودمی‌کنیم وازتعریف‌سهمی نتیجه می‌گیریم که $MF = LM$ (شکل ۲۶.۳).

اما مختصات L برابر با $\left(-\frac{p}{2}, y\right)$ ومختصات F برابر با $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ می‌باشند کـه p پـارامتر سهمی وبرابربا FH است.

بنابراین

$$LM = x + \frac{p}{2}$$

$$MF = \sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}$$

وچون $LM = MF$ پس :

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2} = x+\frac{p}{2}$$

و این معادله پس از اختصار به صورت زیر تبدیل می‌شود :

$$y^2 = 2px \qquad (۱۳-۳)$$

از معادلهٔ سهمی نتایج زیر بدست می‌آیند :

۱) در سهمی عمود مرسوم ازکانون بـرخط هادی، محور تقارن است و به‌همین علت عمود مرسوم ازکانون برخط‌هادی را محور سهمی می گوئیم.

۲) محور سهمی‌آن را فقط در نقطهٔ O وسط FH قطع می‌کند و این نقطه‌راکه نزدیکترین نقطه سهمی به‌کانون و خط هادی است، رأس سهمی می گوئیم.

۳) سهمی و کانون‌آن در یك‌طرف خط هادی واقعند.

اگر محورهای مختصات به‌ترتیبی اختیار شوندکه محور عرضها برمحور سهمی منطبق‌باشد و محور طولها از کانون و خط هـادی بـه فاصلهٔ مساوی اختیار شود ، معادله سهمی بـه صورت $x^2 = 2py$ یا $y = \frac{x^2}{2p}$ است.

هر گاه رأس سهمی به مختصات α و β و محورهای مختصات به‌ترتیب با محوروخط هادی سهمی موازی باشند معادلهٔ سهمی به‌صورت زیرخواهد بود:

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha) \qquad (۱۴-۳)$$

۳.۴.۳ ـ درون و برون سهمی ـــ سهمی‌هم گرچه یك منحنی‌بسته نیست ولی‌مانند هذلولی‌برایش درون و برون‌تعریف می‌کنیم. هرسهمی صفحه را به سه ناحیه بخش می‌کندکه درون، برون وروی سهمی نامیده میشوند. نقطه‌ای دردرون‌یا برون یاروی سهمی است‌هر گاه‌فاصله‌آن نقطه تاکانون سهمی به ترتیب کوچکتر ازیا بزرگتر از یا‌برابر بافاصله‌آن نقطه تا خط هادی باشد.(تمرین: یك‌سهمی بکشید و ناحیه‌های بالا را مشخص کنید.)

۴.۴.۳ـ خطهای مماس وقائم برسهمی‌ـــ سهمی به معادلهٔ $y^2 = 2px$ را در نظر گرفته و نقطهٔ $M(x_0 , y_0)$ را بـرآن اختیاد می‌کنیم (شکل ۲۷۰۳) ضریب زاویـه خط Δ را که درنقطهٔ M برسهمی مماس است به‌صورت زیربدست می‌آوریم:

$$2yy' = 2p \Rightarrow m_{\Delta} = \frac{p}{y}$$

بنابراین معادلهٔ مماس به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

و با ملاحظهٔ آنکه داریم: $y_0^2 = 2px_0$،
معادله فوق به‌صورت زیر خلاصه‌می‌شود:

$$(15\text{-}3) \qquad \boxed{y_0 y = p(x + x_0)}$$

اگر رأس سهمی به مختصات α و β
باشد،معادلهٔمماس بر آن‌در نقطه $M(x_0, y_0)$
به‌صورت زیر است:

(ش ۲۷.۳)

$$(y_0 - \beta)(y - \beta) = p(x + x_0 - 2\alpha)$$

به همین ترتیب دیده می‌شود که معادلهٔقائم بر سهمی در نقطه M (خط Δ') به‌صورت زیر است:

$$(16\text{-}3) \qquad \boxed{y_0 x + py = x_0 y_0 + py_0}$$

هرگاه T و N به‌ترتیب نقاط تلاقی مماس و قائم درنقطه M با محور سهمی باشند، با استفاده از معادله‌های مماس و قائم معلوم می‌شود که:

$$\overline{ON} = x_0 + p \quad \text{و} \quad \overline{OT} = -x_0$$

و درنتیجه:

$$\frac{\overline{OT} + \overline{ON}}{2} = \frac{p}{2}$$

از طرفی می‌دانیم که $\overline{OF} = \frac{p}{2}$، بنابراین نقطه F وسط پاره خط TN و در مثلث قائم‌الزاویه NMT پاره خط MF میانه نظیر وتر است و $MF = FT = FN$ و از اینجا می‌توان نتیجه گرفت:

$$\left.\begin{array}{l} \angle FMT = \angle FTM \\ \angle LMT = \angle FTM \end{array}\right\} \Rightarrow \angle FMT = \angle TML$$

یعنی مماس در نقطه M برسهمی نیمساز زاویه‌ای است که بین شعاع حامل نقطه M وعمودمرسوم

از M برخط هادی پدید می‌آید. نیز می‌توان دید که :

$$\left.\begin{array}{l}\angle FNM = \angle FMN \\ \angle FNM = \angle NML'\end{array}\right\} \Rightarrow \angle FMN = \angle NML'$$

یعنی قائم برسهمی در نقطهٔ M نیمساز زاویهٔ خارجی بین شعاع حامل و خطی است که از نقطهٔ M برخط هادی عمود شود و بالاخره قضیهٔ زیر ثابت شده است :

قضیه ـ خطهای مماس و قائم بر سهمی نیمسازهای زاویه‌هائی هستند که بین شعاع حامل نقطه و خطی که از نقطه مفروض عمود بر خط هادی رسم شود، پدید می‌آیند .

تحت مماس و تحت قائم سهمی ـ درهرمنحنی اگر مماس و قائم دریك نقطهٔ M از منحنی محور خفتها را به‌ترتیب درنقاط T و N قطع کنند و نقطهٔ P تصویر نقطهٔ M بـر محور خفتها باشد، اصطلاحا $\overline{PT}$ و $\overline{PN}$ را به ترتیب تحت مماس‌وتحت قائم‌نقطهٔ M برمحور خفتها می‌نامیم. تحت مماس‌وتحت قائم سهمی دارای ویژگی‌هائی‌هستند که در این بخش‌می‌توان آنها رابررسی کرد.

بطوری که در شکل (۲۷.۳) دیده می‌شود ، در سهمی $\overline{OP} = x_0$ و از طرفی دیدیم که $\overline{ON} = x_0 + p$ بنابراین : $\overline{PN} = \overline{ON} - \overline{OP} = p$

یعنی : تحت قائم نقطهٔ M سهمی مساوی است با پارامتر سهمی.

از طرفی $\overline{OP} = x_0$ و چنانکه دیدیم $\overline{OT} = -x_0$ است، و این تساویها نشان می‌دهند که نقطهٔ O وسط PT است. بنابراین می‌توان گفت:

قضیهــ در سهمی تحت قائم مقدار ثابت دارد و برای همهٔ نقطه‌های سهمی مساوی‌پارامتر سهمی‌است ورأس‌سهمی بروسط‌تحت مماس‌واقع است.

۵.۴.۳ـ رسم سهمی ـ سهمی را هم به‌وسیلهٔ حرکت مداوم و هم ازطریق نقطه‌یابی می‌توان رسم کرد. بداین طریق که اگر یك‌سرنخی به‌طول‌معین l را درنقطهٔ F کانون سهمی ثابت کرده وسر دیگر آن را به‌نقطهٔ N منتهاالیه یك ضلع قائم گونیا که درازای آن مساوی l است وصل کنیم و ضلع دیگر گونیا را در وضعی متکی بر امتداد خط D هادی سهمی قرار دهیم و نوك قلم را چنان‌برنخ و لبهٔ گونیا تکیه‌دهیم که مطابق شکل (۲۸.۳) هر دو قطعهٔ MF و MN از نخ در حال کشیده و کمی متکی برلبهٔ گونیا باشد، نقطهٔ M ازصفحه در وضعی قرار می‌گیرد که :

$$MF + MN = l$$

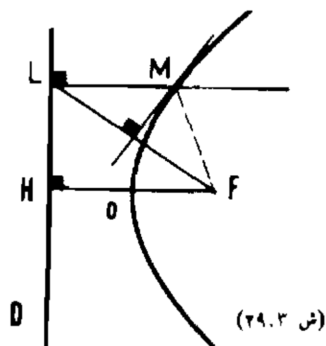
$$ML + MN = l$$

L M N H F D

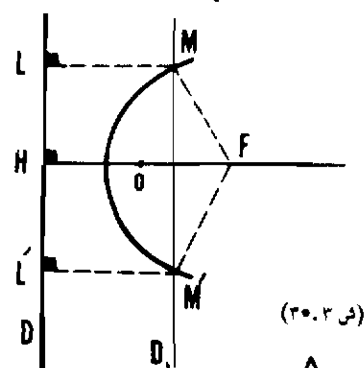
(ش ۲۸.۳)

و در نتیجه $MF=ML$ است، یعنی M نقطه‌ای از سهمی بـه‌کانون F و به‌خط هادی D است؛ پس اگر گونیارا در همان وضع برخط‌هادی بلغزانیم و نوك‌قلم را همواره متکی بر لبهٔ دیگر گونیا ودر وضعی که در هرحال دو قطعهٔ‌نخ کشیده‌و درامتدادخط راست‌باشندقراردهیم،سهمی‌رسم می‌شود.

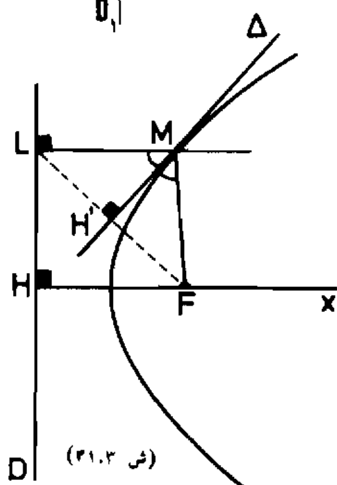
در ترسیم سهمی به‌طریق نقطه‌یابی می‌توان کانون F را به نقطه دلخواه L از خط هـادی وصل کرده و عمود منصف FL را رسم کنیم تا عمودی را کـه در نقطهٔ L بـر خط هادی رسم می‌شود در نقطهٔ M قطع کند . در ایـن صورت $MF=ML$ و بنابراین M نقطه‌ای از سهمی است (شکل ۲۹.۳) و با اختیار کردن نقاط مختلف L برخط هادی نقاط مختلف سهمی مشخص می‌شوند .



(ش ۲۹.۳)



(ش ۳۰.۳)



(ش ۳۱.۳)

در ترسیم سهمی ازطریق نقطه‌یابی‌از روش دیگرنیز می‌توان استفاده‌کرد به‌این‌ترتیب که‌خط D_1 را موازی‌خط هادی رسم‌کـرده و به‌مرکز F و بـا شعاعی مساوی فاصلهٔ دو خط D و D_1 دایـره‌ای رسم می‌کنیم. این دایـره خط D_1 را در دونقطهٔ M و M' قطع می‌کند که هردو بر سهمی به‌کانون F و بـه خط هـادی D واقعند، (شکل ۳۰.۳)

روشن است که با ترسیم خطهای مختلف از نوع D_1 نقاط مختلف سهمی بدست می‌آیند و خط D_1 را چنان باید رسم کرد که از کانون و خط هادی در فاصله‌ای باشد که دایرهٔ مرسوم‌آنرا قطع‌کند و این تلاقی درصورتی روی می‌دهد که فاصله خط D_1 از خط هادی بیش از $\frac{p}{2}$ باشد. (به‌کانون سهمی نزدیکتر باشد.)

۶.۴.۳ ــ رسم مماس برسهمی ــ از آنچـه در بند (۴.۴.۳) ثـابت شد، می‌توان نتیجه گرفت که قرینهٔ‌کانون سهمی نسبت به‌هرخط‌مماس برآن، برخط هادی سهمی واقع است . زیرا اگرخط Δ درنقطهٔ M برسهمی به‌کانون F و هادی D مماس

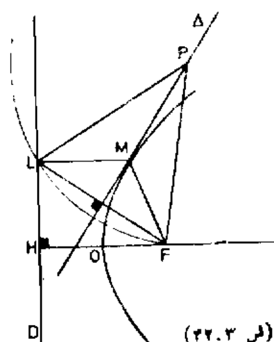
باشد و پاره خط ML را از نقطهٔ M عمود برخط هادی رسم کنیم و M را به F وصل کنیم در صورتی که مماسΔ پاره خط FL را درنقطهٔ H' قطع کرده باشد (شکل۳۱.۳) دومثلث MLH' و $MH'F$ متساویند (ض‌زض). و بنابراین $LH' = H'F$ و $LF \perp \Delta$ ؛ یعنی نقطهٔ L قرینهٔ کانون F نسبت به‌خط Δ است. ازاین ویژگی برای رسم مماس برسهمی استفاده می‌شود.

رسم مماس ازیك نقطه برسهمی را درسه‌حالت مختلف می‌توان بررسی کرد .

۱) اگرنقطه‌ای ازسهمی مشخص باشد برای رسم مماس بر سهمی درآن نقطه کافی است شعاع حامل آن نقطه را رسم کرده و ازآن نقطه عمودی برخط هادی رسم کنیم، نیمساز زاویهٔ بین این دوخط مماس برسهمی درآن نقطه است .

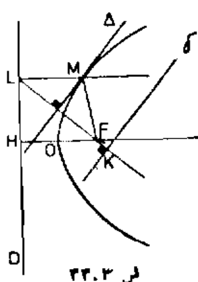
۲) اگر مقصود رسم مماس برسهمی از نقطه‌ای مانند P که برسهمی واقع نیست باشد، ملاحظه می‌کنیم که قرینهٔ کانون F نسبت به‌خط مماس باید برخط هادی D واقع باشد. پس اگر دایرهٔ به‌مرکز P و شعاع PF خط هادی را در نقطه‌ای مانند L قطع کند ، عمود منصف LF همان مماس مطلوبست (شکل ۳۲.۳) .

روشن است که دراین حالت شرط وجود مماس آن است که دایرهٔ به‌مرکز P و به‌شعاع PF باخط هادی متلاقی باشد و این درصورتی روی می‌دهد که نقطهٔ P به خط هادی سهمی نزدیکتر باشد تا به‌کانون سهمی، یعنی نقطهٔ P دربرون سهمی باشد و دراین‌صورت مسئله همواره‌دوجواب دارد .



(ش ۳۲.۳)

۳) اگربخواهیم برسهمی مفروض مماسی موازی امتدادمعین δ رسم کنیم، ملاحظه می‌کنیم که قرینهٔ کانون F نسبت به مماس مطلوب بر خطی واقع است که از نقطهٔ F بر δ عمود رسم شود؛ پس اگر از نقطهٔ F عمود FK را بر δ رسم کنیم و این عمود خط هادی را در نقطهٔ L قطع کند ، عمود منصف FL جواب مسئله است (شکل ۳۳.۳).



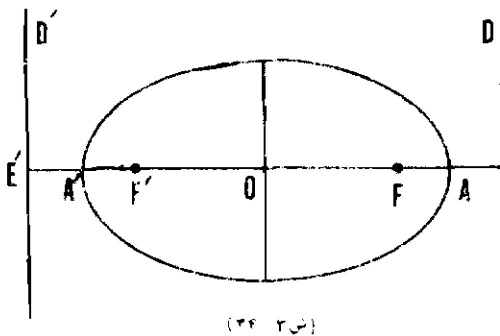
ش ۳۳.۳

دراین حالت مسئله در هر صورت دارای یك جواب است مگر آنکه با محور سهمی موازی باشد .

(۳ـ۵)ـ خطهای هادی درمقطعهای مخروطی

۱.۵.۳ـ تعریف ـ خطی که از مزدوج توافقی هرکانون بیضی یاهذلولی نسبت به دو رأس کانونی آن منحنی بگذرد و برمحور کانونی عمود باشد. خط هادی بیضی یا هذلولی نظیر آن کانون نامیده میشود. خط هادی سهمی را پیشتر تعریف کرده‌ایم و یکی بیش نیست

ازاین تعریف نتیجه می‌شود که بیضی و هذلولی دارای دو خط هادی هستند که هرخط هادی نظیر یکی ازکانونها است. فاصلهٔ هرخط هادی ازمرکز منحنی مساوی $\frac{a^2}{c}$ و ازکانون نظیر مساوی $\frac{b^2}{c}$ است، زیرا اگر در بیضی بکانونهای F و F′ وقطرکانونی مساوی 2a نقطه E مزدوج کانون F نسبت به دو نقطهٔ A و A′ باشد(شکل ۳۴.۳) با توجه به آنکه نقطهٔ O وسط AA′ است، داریم :



(ش ۳ ـ ۳۴)

$$\overline{OA}^2 = \overline{OF} \cdot \overline{OE} \Rightarrow a^2 = c \cdot \overline{OE}$$

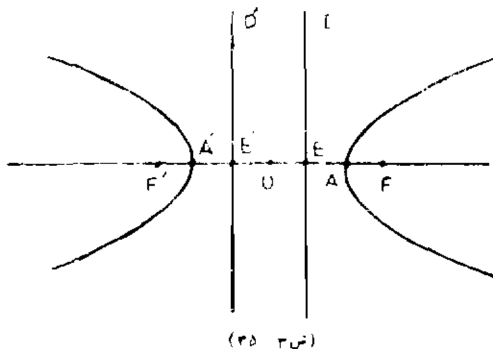
(جهت از A′ به A را مثبت می گیریم).

ودر نتیجه:

$$\overline{OE} = \frac{a^2}{c}$$

از طرفی

$$\overline{FE} = \overline{OE} - \overline{OF} = \frac{a^2}{c} - c$$



(ش ۳ ـ ۳۵)

یا

$$\overline{FE} = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

در هذلولی بهمین ترتیب و با ملاحظهٔ آنکه $b^2 = c^2 - a^2$ است گزاره ثابت می‌شود.

از رابطهٔ $\overline{OE} = \frac{a^2}{c}$ نتیجه می‌شود که خط هادی نظیر هریك از کانونهای بیضی یا هذلولی باآن کانون دریك طرف مرکز منحنی قرار دارد و دربیضی $OE > a$ و در هذلولی

$\overline{OE}<a$ یعنی در بیضی خط هادی نظیر هرکانون خارج فاصلهٔ مـرکز منحنی و رأس نظیر کانون مربوط واقع است و درهذلولی به‌ترتیب عکس، خط هادی نظیر هر کانون از رأس نظیر آن‌کانون به مرکز منحنی نزدیکتر است.

باید توجه داشت‌که خطهای هادی مقاطع مخروطی دارای ویژگیهای مشترکی هستندکه از ویژگی‌های مشترك این منحنی‌هانتیجه‌می‌شوند و در این بخش‌آنها را بررسی می‌کنیم.

قضیهـ نسبت فاصله‌های هرنقطهٔ بیضی یا هذلولی از یك‌کانون و از خط هادی نظیر آن کانون مقداری ثابت ومساوی $\frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی یاهذلولی است. (بدیهی است‌که این قضیه برای سهمی هم برقرار است و نسبت مورد بحث برابر ۱ می‌باشد.)

برهان ـ نقطهٔ $M(x , y)$ را بربیضی به اقطار $2a$ و $2b$ فرض می‌کنیم(شکل ۳۶.۳). با توجه به‌آنچه قبلاً ثابت‌کرده‌ایم .

$$MF=a-\frac{c}{a}x$$

اگر خط D خط هادی نظیر کانون F از بیضی مفروض و MK اندازهٔ عمودی باشدکه از نقطهٔ M برخط D رسم می‌شود، داریم :

$$\overline{MK}=\overline{PH}=\overline{OH}-\overline{OP}$$

و با ملاحظهٔ آنکـه $\overline{OH}=\frac{a^2}{c}$است. و درنتیجه خواهیم داشت : $MK=\frac{a^2}{c}-x$

$$\frac{MF}{MK}=\left|\left(a-\frac{c}{a}x\right):\left(\frac{a^2}{c}-x\right)\right|=\frac{c}{a}$$

(ش.۳. ۳۶)

در هذلولی نیز باروشی مشابه قضیه ثابت می‌شود.

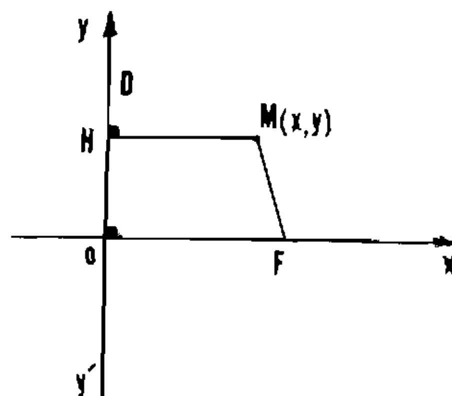
۲.۵.۴ـ تعریف مشترك مقاطع مخروطی

قضیهـ مکان هندسی نقاطی از صفحه که نسبت فاصله‌های آنها از یك نقطه و یك خط ثابت صفحه مقدارثابت مساوی e باشد، بیضی یا هذلولی یا سهمی است برحسب‌آنکه عددثابت e کوچکتر یا بزرگتر از یك یا مساوی یك باشد.

برهان‌ـ خط D ونقطهٔF واقع درخارج آنرا دریك صفحه درنظرگرفته واز نقطهٔ F عمودی بر خط D رسم مـی‌کنیم و دستگـاه‌مختصات را چنان اختیار می‌کنیم که محورطولها برعمود مزبور و محور عرضها برخطD منطبق و جهت مثبت محور طول از خط D به‌جانب نقطهٔ F باشد. شکل ۳۷.۳، دراین صورت اگر فاصلهٔ نقطهٔ F را از خط D با p نمایش دهیم و نقطهٔ

$M(x , y)$ نقطه‌ای از مکان هندسی مطلوب باشد، داریم:

$$\frac{MF}{MH}=e$$



(ش.۳، ۲۷)

اما نسبت به‌دستگاه مختصات مزبور $F(p , 0)$ و $H(0 , y)$ است، بنابراین

$$MH=|x| \quad \text{و} \quad MF=\sqrt{(x-p)^{2}+y^{2}}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{MF}{MH}=e \Rightarrow MF=e\,.\,|x| \Rightarrow \sqrt{(x-p)^{2}+y^{2}}=e\,.\,|x|$$

و چون عبارتهای دوطرف تساوی اخیر را مربع کنیم، معادلهٔ مکان هندسی مطلوب به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$(1) \qquad (1-e^{2})x^{2}-2px+y^{2}+p^{2}=0$$

اما اگر $e=1$ باشد، معادلهٔ (۱) به‌صورت

$$y^{2}-2px+p^{2}=0$$

یا

$$y^{2}=2p(x-\frac{p}{2})$$

خلاصه می‌شود و این معادلهٔ سهمی است کـه رأس آن وسط OF و محور آن منطبق بر محور طولها است.

چنانچه $e<1$ باشد، معادلهٔ (۱) را به‌صورت زیر می‌توان تبدیل کرد:

$$(2) \qquad \frac{(x-\frac{p}{1-e^{2}})^{2}}{\frac{e^{2}p^{2}}{(1-e^{2})^{2}}}+\frac{y^{2}}{\frac{e^{2}p^{2}}{1-e^{2}}}=1$$

وبا ملاحظهٔ‌آنکه داریم: $1-e^2>0$ ، $\frac{e^2p^2}{1-e^2}$ و $\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}$ مثبت هستند معادلهٔ (۲) معادلـهٔ یـك بیضی است بـه مرکز $O'(\frac{p}{1-e^2}, 0)$ که درآن مقادیر a و b عبارتند از:

$$a=\frac{ep}{1-e^2}$$

$$b=\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$$

دیده می‌شود که در این بیضی داریم:

$$c^2=a^2-b^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}-\frac{e^2p^2}{1-e^2}=\frac{e^4p^2}{(1-e^2)^2}$$

وبنابراین

$$c=\frac{e^2p}{1-e^2}$$

هرگاه داشته باشیم: $e>1$ ، $e^2-1>0$ و معادله (۱) رابه‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{(x+\frac{p}{e^2-1})^2}{\frac{p^2e^2}{(e^2-1)^2}}-\frac{y^2}{\frac{p^2e^2}{e^2-1}}=1 \qquad (3)$$

و معادلهٔ (۳) نیز معادلهٔ هذلولی است که در آن

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{pe^2}{e^2-1} \quad \text{و} \quad b=\frac{pe}{\sqrt{e^2-1}} \quad \text{و} \quad a=\frac{pe}{e^2-1}$$

و x و y مختصات مرکز آن به‌ترتیب عبارتند از $-\frac{p}{e^2-1}$ و 0

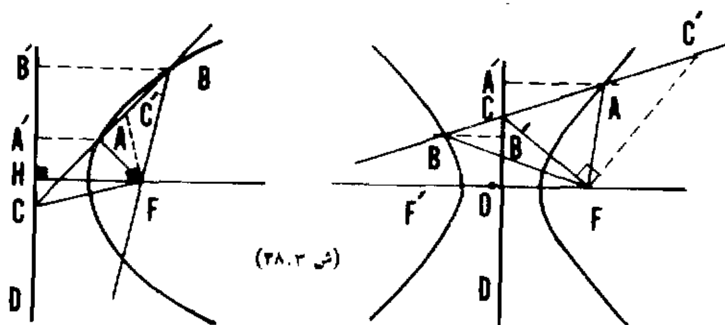
تعریف‌مشترك مقاطع مخروطی- اگر خط D و نقطهٔ F خارج آن خـط مفروض باشند، **مکان** هندسی نقطهٔ M از صفحهٔ (D ، F) را که نسبت فاصله‌های آن از نقطهٔ F و خط D **مساوی** عدد ثابت e باشد، مقطع مخروطی گوئیم.

نقطهٔ F را کانون و خط D را خط هادی و فاصلهٔ F را از خط D **میز (پارامتر) منحنی** و عدد e را خروج از مرکز مقطع مخروطی می‌گوئیم. به‌طوری که در قضیهٔ قبل ثابت شد، بر حسب آنکه عدد e کوچکتر یا بزرگتر یا مساوی یك باشد، مقطع مخروطی بیضی یا هذلولی یـا سهمی است. دایـره را به‌عنوان یك مقطع مخروطی حالت خاصی از بیضی به‌ازای $e=0$ می‌توان درنظر گرفت.

۳.۵.۳ ـ ویژگیهای مقطع مخروطی ـ تعریف مشترکی که برای مقطع مخروطی بیضی و هذلولی وسهمی ذکرشد (شمارهٔ ۲.۵.۳)، به‌تعریفهای دیگراین‌سه منحنی که قبلا شرح دادیم این مزیت‌را داردکه سه‌منحنی را، به‌رغم شکلهای متفاوتی‌که دارند، تبدیل به‌یك‌منحنی به‌نام مقطع مخروطی می‌کند. بنابراین، هرقضیه یاخاصیتی‌که‌ازاین تعریف درمقطع مخروطی به‌دست آید، در هرسه منحنی صادق است وازاین رو،تحقیق دربارهٔ منحنیهای نامبرده ازاین راه، بسیار ساده‌تر ومنطقی‌تر می‌شود. اینك خاصیتهای مهم واساسی مقطع مخروطی راکه بطور ساده و طبیعی ازتعریف آن‌نتیجه می‌شوند، وحتی تعریفهای قبلی‌که بیضی وهذلولی وسهمی‌را از روی آنها شناخته‌ایم، مانند قضیه ازروی تعریف مشترك ثابت می‌کنیم.

الف ـ اگر خطی مقطع مخروطی به‌کانون F وخط هادی D را درنقاط A و B وخط‌هادی را درنقطهٔ C قطع کند، خط FC یکی از دوزاویهٔ بین FA و FB را نصف میکند.

زیرا بطوری‌که درشکل ۳۸.۴ ملاحظه می‌شود، اگر A' و B' به‌ترتیب تصویرهای دو نقطهٔ A و B برخط هادی باشند، به‌موجب ویژگی اصلی مقطع مخروطی داریم:



$$\frac{AF}{AA'}=\frac{BF}{BB'}=e$$

بنابراین:

$$\frac{AF}{BF}=\frac{AA'}{BB'}$$

اما ازتشابه مثلثهای CAA' و CBB' می‌توان نتیجه گرفت‌که:

$$\frac{AA'}{BB'}=\frac{CA}{CB}$$

و ازمقایسهٔ این دوتساوی خواهیم داشت:

$$\frac{FA}{FB}=\frac{CA}{CB}$$

این رابطه نشان می‌دهدکه خط FC نیمساز زاویهٔ AFB بازاویهٔ مجانب آن است.

ب ـ اگرمماس‌درنقطهٔ A برمقطع مخروطی خط‌هادی را درنقطهٔ C قطع‌کند، شکل ۳۹.۳، قطعه خط AC ازمماس ازکانون F به‌زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود.

زیرا اگر قاطع AB گرد نقطهٔ A دوران کند تا نقطهٔ B، نقطه تلاقی دیگر آن با منحنی، بی‌نهایت به‌نقطهٔ A نزدیك شود، دروضع‌حدی خود، به‌مماس در نقطهٔ A تبدیل می‌شود و در حالت حدی نیز دو خط FC و FC′ نیمسازهای دو زاویهٔ‌مجانب‌یکدیگر برهم‌عمودندو باملاحظهٔ آنکه C′ یا C بین A و B است FC′ بر FA منطبق می‌شود، درنتیجه FA⊥FC یعنی ∠AFC قائمه است.

(ش ۳. ۳۹)

پ ـ اگر ازنقطه‌ای واقع برخط هادی دو مماس بر مقطع مخروطی رسم کنیم، خط واصل بین نقاط تماس ازکانون مقطع مخروطی می‌گذرد و برخط واصل‌بین آن نقطه وکانون‌عموداست.

هرگاه ازنقطهٔ C واقع برخط هادی‌مقطع مخروطی دومماس CM و CM′ برمنحنی رسم شده باشد،به‌موجب آنچه دربند «ب» ثابت‌شد، CF⊥FM و CF⊥FM′ شکل ۳.۴۰، در نتیجه FM و FM′ در یــــك امتدادنـــــد و MM′⊥CF.

(ش ۳.۴۰)

ت ـ دربیضی (هذلولی) مجموع (تفاضل) فاصله‌های هرنقطهٔ منحنی‌از دوکانون مقدارثابتی است.

از M عمودی برخطهای هادی D و D′ فرود می‌آوریم شکل ۳ . ۴۱. داریم:

$$\frac{MF}{MH}=e \quad \text{و} \quad \frac{MF'}{MH'}=e$$

و از آنجا:

$$MF+MF'=e(MH+MH')$$

$$e(MH+MH')=e\cdot EE'$$

$$e\cdot EE'=\frac{c}{a}\cdot\frac{2a^2}{c}$$

$$MF+MF'=2a$$

(ش ۳.۴۱)

برای هذلولی نیزحکم بالا با روش مشابه ثابت می‌شود.

تمرین

۱ـ فاصلهٔ کانونی بیضی را که نصف قطرهای کانونی و نـاکانـونی آن به‌ترتیب ۵ و ۴ سانتیمترند حساب کنید.

۲ـ فاصلهٔ کانونهای یک بیضی ۸ سانتی‌متر و فاصلهٔ یک رأس کانونی از کانون نظیر آن یک سانتی‌متر است؛ بیضی را باقطرهای آن مشخص کنید.

۳ـ مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ یک بیضی از دو کانون آن ۲۰ سانتیمتر و نصف‌قطر ناکانونی آن ۶ سانتیمتر است، فـاصلهٔ کانونی بیضی و فـاصلهٔ هـر کانون را از رأس مجاورش تعیین کنید. دریک کانون بیضی خطی برمحور کانونی‌عمودرسم‌می‌کنیم، اندازه وتری از بیضی را که در امتداد این عمود است حساب کنید.

۴ـ خروج از مرکز یک بیضی $\frac{۱}{۲}$ و اندازهٔ قطر ناکانونی آن ۶ سانتیمتر است، بیضی ر مشخص کنید.

۵ـ قطرهای یک بیضی به‌ترتیب ۱۲ و ۸ سانتیمترنـد معادله بیضی را نسبت بـه دستگاه مختصاتی که مبدأ آن برمرکز بیضی و محور طولهایش بر محور کانونی بیضی منطبق است تعیین کنید.

۶ـ فاصلهٔ کانونی یک بیضی ۸ سانتیمتر و قطر کانونی آن ۱۰ سانتیمتر است، معادلهٔ بیضی را نسبت به‌دستگاه مختصاتی که مبدأ آن برمرکز بیضی و محور عرضهای آن بـرمحور ناکانونی بیضی منطبق است تعیین کنید.

۷ـ معادلههای پارامتری هریک از بیضی‌ها را در دومسئله قبل بنویسید.

۸ ـ بیضی به‌معادلهٔ $9x^2+4y^2=1$ مفروض است، اندازهٔ قطرها وفاصلهٔ کانونی آنرا تعیین کنید. مختصات چهار رأس و کانونهای بیضی را حساب کنید.

۹ ـ نقطهٔ $H(2 \cdot 3)$ مرکز یک بیضی بـه‌اقطار ۱۰ و ۶ است، معادلهٔ بیضی را نوشته و مختصات کانونهای آنرا تعیین کنید. (فرض کنید قطر بزرگتر بامحور x ها موازی است.)

۱۰ ـ معادلهٔ بیضی را بنویسید که مرکزش مبدأ مختصات و دو رأس مجاورآن $A(8 \cdot 0)$ و $B(0 \cdot 2)$ باشند مختصات کانونهای بیضی را حساب کنید.

۱۱ـ خروج ازمرکز یک بیضی $\frac{۴}{۵}$ است؛ نسبت قطرهای آن را حساب کنید.

۱۲ـ بیضی به‌اقطار ۸ و ۶ سانتیمتر مفروض است؛ نقطهٔ M را برآن‌چنان اختیار می‌کنیم که پاره خط واصل بین این نقطه و مرکز بیضی بـا قطر کانونی زاویهٔ °۴۵ تشکیل دهد. فاصلهٔ نقطهٔ M را از مرکز بیضی تعیین کنید.

۱۳ـ بیضی به‌فاصلهٔ کانونی ۱۶ سانتی‌متر و به قطـر کانونی ۲۰ سانتیمتر مفروض است

تحقیق کنید دایره‌ای که مرکز آن بـر مرکز بیضی و شعاع آن مساوی نصف فاصلهٔ کانونی است بیضی را قطع می‌کند یا خیر؟ درصورت تلاقی بیضی و دایره زاویهٔ بین شعاع حامل نقطه تلاقی را با قطرکانونی برحسب یکی‌از نسبتهای مثلثاتی آن تعیین کنید.

۱۴ــ ثابت‌کنیدکه دایرهٔ هادی بیضی آنرا قطع نمی‌کند.

۱۵ــ اگر یك‌دایرهٔ هادی از بیضی رسم شده باشد، بیضی مشخص است؟ چرا؟

۱۶ــ یك‌دایرهٔ هادی از بیضی مفروض و یك رأس از رأسهای محور کانونی آن معلومند. کانونهای بیضی را مشخص کنید.

۱۷ــ دایرهٔ اصلی یك بیضی و یکی از رأسهای واقع برقطر ناکانونی آن معلومند، کانونهای بیضی را مشخص کنید.

۱۸ ــ از یك بیضی یك‌کانون و یك نقطه و اندازه‌های دوقطر آن معلومند. بیضی‌را به‌وسیلهٔ کانونهایش مشخص کنید.

۱۹ ــ دایره‌ای‌که به‌قطر شعاع حامل یك‌نقطه از بیضی رسم می‌شود بردایرهٔ اصلی بیضی مماس است.

۲۰ ــ قائم بربیضی دریك نقطه M محورهای بیضی را در نقاط P و Q قطع‌می‌کند؛ اگر a و b به‌ترتیب نصف قطرهای‌کانونی وناکانونی بیضی باشد (به‌روش تحلیلی) ثابت‌کنید که:

$$\frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}}=\frac{b^{2}}{a^{2}}$$

۲۱ ــ از یك بیضی سه مماس ویك‌کانون داده شده‌اند، بیضی را مشخص کنید.

راهنمایی ــ قرینهٔ هرکانون بیضی نسبت به‌خط مماس بر بیضی روی دایرهٔ هادی‌کانون دیگر واقع است.

۲۲ ــ معادلهٔ هذلولی به‌اقطار ۸ و ۶ که‌مرکز آن نقطهٔ O_1 (۱ ، ۱) وقطر بزرگترش با محور xها موازی است بنویسید، مختصات‌کانونها و نقاط تلاقی هذلولی را بامحورهای‌مختصات تعیین‌کنید. معادلهٔ مجانبهای هذلولی را بنویسید.

۲۳ ــ مکان هندسی مرکزهای دایره‌هائی راکه بردو دایرهٔ برون‌هم مماسند تعیین‌کنید.

۲۴ ــ از هذلولی یك کانون ویك نقطه و اندازه‌های دو قطر داده شده‌اند؛ هذلولی را مشخص کنید.

۲۵ ــ از هذلولی دوکانون ویك خط مماس داده شده‌اند؛ هذلولی را مشخص کنید.

۲۶ ــ ثابت‌کنید اگر یك بیضی ویك هذلـولی کانونهای مشترك داشته بـاشند، دو منحنی یکدیگر را به‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند. (روش تحلیلی)

۲۷ ــ مماس بریك هذلولی مماسهای مرسوم‌بردو رأس کانونی را در نقاط M و M′ قطع

می‌کنند؛ ثابت‌کنید: دایرهٔ به‌قطر MM' ازدو کانون هذلولی می‌گذرد و $AM \cdot A'M'$ مقدار ثابتی است.

۲۸ ـ ثابت‌کنید اگر نقطهٔ M برهذلولی متساوی‌القطرین به‌کانونهای F و F' و به‌مرکز O باشد $MO^2 = MF \cdot MF'$.

۲۹ ـ ثابت‌کنید حاصل‌ضرب فاصله‌های هرنقطه ازهذلولی از دوخط مجانب آن مقداری است ثابت .

۳۰ ـ در مثلث ABC دو رأس B و C ثابت وتفاضل دو زاویهٔ B و C مساوی یك‌قائمه است؛ مکان هندسی‌رأس A را تعیین کنید.

۳۱ ـ از هذلولی یك‌کانون ویك مماس و یك مجانب داده‌شده‌اند: هذلولی را رسم کنید.

۳۲ ـ مکان‌هندسی مرکزهای‌دایره‌هائی راکه‌بریك‌خط و یك دایرهٔمفروض‌مماسندتعیین کنید.

۳۳ ـ مطلوبست تعیین مکان هندسی کانون سهمی‌هائی که خط هادی مشترك دارندو برخط ثابتی مماسند.

۳۴ ـ سهمی را که خط هادی و دونقطه ازآن داده شده‌اند مشخص کنید.

۳۵ ـ سهمی راکه کانون و دو نقطه ازآن داده شده‌اند مشخص کنید.

۳۶ ـ سهمی راکه خط هادی ودو مماس ازآن داده شده‌اند مشخص‌کنید .

۳۷ ـ سهمی راکه‌کانون و دوخط مماس برآن داده شده‌اند مشخص‌کنید.

۳۸ ـ معادلهٔ سهمی را بنویسید که کانون آن نقطهٔ F (۲ ، ۰) وخط هـادی آن بمعادلهٔ $x = -2$ باشد. معادلهٔ مماس براین سهمی را درنقطهٔ باطول ۲ بنویسید.

۳۹ ـ ثابت‌کنید مکان هندسی وسط وترهای موازی درسهمی خطی است موازی، بـامحور سهمی .

۴۰ ـ مکان هندسی کانونهـای سهمی‌هائی راتعیین‌کنیدکه‌از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند و محورهای آنها با خط مفروض Δ موازی است .

۱ ـ ثابت کنید:

$$(\vec{V}_1+\vec{V}_2)\cdot(\vec{U}_1+\vec{U}_2)=\vec{V}_1\cdot\vec{U}_1+\vec{V}_1\cdot\vec{U}_2+\vec{V}_2\cdot\vec{U}_1+\vec{V}_2\cdot\vec{U}_2$$

۲ ـ معادله‌های خطی را بنویسید که ازنقطهٔ $M(1, 1, 1)$ بگذرد و زاویه‌های آن با محورهای ox و oy بـه‌ترتیب $\alpha=\frac{\pi}{4}$ و $\beta=\mathrm{Arc}\cos\frac{\sqrt{7}}{4}$ باشد.

۳ ـ خط D به معادله‌های :

$$x=2y+1=z-1$$

و خط 'D به‌معادله‌های :

$$2x=y-4=3z-3$$

مفروضند ؛ معادله‌های صفحه‌هائی‌را تعیین کنید که به‌ترتیب‌شامل D و 'D و بایکدیگر موازی‌باشند.

۴ ـ $OO'=d$ خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی یك مثلث ABC و R و r شعاعهای دایره‌های مزبور فرض می‌شوند؛ ثابت‌کنید :

$$d^2=R(R-2r)$$ (رابطهٔ اولر[1])

راهنمائی ـ یك رأس مثلث، (مثلا A) ، را بـه نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی وصل کنید و امتداد دهید تا دایره محیطی را در نقطهٔ D قطع کند و ثابت کنید: $DB=DC=DO$؛ سپس، قوت نقطهٔ O را به دوطریق نسبت به‌دایرهٔ محیطی بنویسید وبا استفاده ازآنچه‌گفته شدو از تشابه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب که وترهایشان OA وقطر $DO'E$ از دایرهٔ محیطی باشد، رابطهٔ‌اولر را به‌دست‌آورید .

۵ ـ ثابت‌کنید دایره‌هایی‌که محیط دو دایرهٔ مفروض را نصف می‌کنند، از دو نقطه ثابت واقع برخط‌المرکزین دو دایره می‌گذرند.

۶ـ ثابت‌کنید بیش ازسه دایرهٔ دو به دو عمود برهم نمی‌توان رسم‌کرد.

۷ـ دایره C به‌مرکز O وبه‌شعاع R ودونقطه ثابت A و B که نسبت به‌نقطه O قرینه یکدیگرند داده می‌شود؛ نقطه متغیر M بردایره C جابه‌جا می‌شود. خطوط MA و MB دایرهٔ

C را غیر از نقطه M به‌ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. ثابت کنید که حاصل‌جمع:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}}+\frac{\overline{BM}}{\overline{BQ}}$$

به‌وضع نقطه M در روی دایره بستگی ندارد.

۸ـ در مثلث غیر مشخص ABC نیمساز زاویه A را رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در نقطه D قطع کند؛ دو دایره به‌مرکزهای B و C رسم می‌کنیم که هر دو بر نقطه D بگذرند و از رأس A دو خط براین دو دایره مماس می‌کنیم؛ ثابت کنید که اگر P و Q نقاط تماس مماسهای مرسوم باشد، خواهیم داشت:

$$AP \cdot AQ = AD^{2}$$

۹ ـ دونقطهٔ A و B وعدد k داده می‌شوند. دوایر C را به‌قسمی مشخص کنید که تفاضل قوتهای نقاط A و B نسبت به‌هریك ازآن دوایر برابر با k باشد.

۱۰ ـ در هریك از حالات زیر معادلهٔ کلی دسته دایره‌هایی راکه‌خط Δ محور و دایرهٔ C یکی از دایره‌های دسته دوایر است تعیین‌کنید. (خفت مرکز هر دایره را پارامتر مشخص‌کنندهٔ آن دایره اختیار کنید).

معادلهٔ خط Δ	معادلهٔ دایرهٔ C
$x=2$	$x^{2}+y^{2}=4$
$y=x$	$x^{2}-2x+y^{2}=0$
$y=x-7$	$x^{2}-8x+y^{2}-6y=0$

۱۱ ـ تحقیق‌کنید اگر معادلهٔ بیضی به‌صورت $f(x, y)=(\frac{x-\alpha}{a})^{2}+(\frac{y-\beta}{b})^{2}=1$ باشدآن‌گاه تابع f به‌ازای‌مختصات‌نقاط درونی بیضی دارای یك علامت و به ازای مختصات نقاط برونی آن دارای علامت دیگر است.

۱۲ ـ بیضی به معادلهٔ $(x-1)^{2}+2(y-1)^{2}=9$ مفروض است. تحقیق کنید نقطهٔ $P(-1, -1)$ دربرون یا دردرون بیضی است.

۱۳ـ هرگاه r اندازهٔ شعاع حامل یك نقطه از بیضی باشد ثابت‌کنید:

$$a-c\leqslant r\leqslant a+c$$

۱۴ ـ از بیضی یك‌کانون و دو مماس و اندازهٔ قطرکانونی یاقطر ناکانونی داده شده‌اند؛ بیضی را مشخص‌کنید.

۱۵ ـ بیضی E با دوکانونش F و F′ ومقدار ثابتش 2a مشخص است. ازنقطه‌ای مانند P دو مماس PM و PM′ را بربیضی رسم می‌کنیم ونقاط تماس را M و M′ می‌نامیم.

اولا ثابت کنید زاویهٔ بین‌هر مماس و خط واصل از P به یك کانون مساوی است‌بازاویهٔ بین مماس دیگر و خط واصل از P به‌کانون دیگر .

ثانیاً ـ ثابت‌کنید خطی که نقطهٔ P را به‌یك کانون وصل می کند، نیمساز زاویهٔ بین دوشعاع حامل واصل ازآن‌کانون به‌نقاط M و M' است .[1]

۱۶ ـ ثابت کنید مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و نقطهٔ همرسی سه‌ارتفاع آن کانـونهای یك بیضی هستندکه براضلاع مثلث مماس است.

۱۷ ـ اگر ازنقطه‌ای از دایرهٔ هادی دو مماس بر بیضی رسم کنیم و دو نقطهٔ تقاطع دیگر مماسها را با دایرهٔ هادی بهم وصل‌کنیم، خط واصل بر بیضی مماس است.

۱۸ ـ مکان هندسی نقطه‌هائی را تعیین‌کنیدکه ازآن‌نقاط دومماس عمود برهم بر بیضی‌بتوان رسم کرد .

۱۹ ـ خط مماس برهذلولی مجانبهای آنرا در نقاط P و Q قطع می کند، اگر F و F' کانونهای هذلولی باشند، ثابت‌کنید چهارضلعی $FPF'Q$ محاطی است.

۲۰ ـ هرگاه مماس مرسوم در نقطهٔ M از هذلولی مجانبهای آنرا در نقاط A و B قطع کند، ثابت‌کنید: $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 = MF \cdot MF'$

۲۱ ـ ثابت‌کنید اگر هذلولی متساوی‌القطرین از سه رأس مثلثی بگذرد، از نقطهٔ همرسی سه ارتفاع‌آن مثلث نیز خواهد گذشت.

۲۲ ـ ثابت‌کنید اگر مثلث قائم‌الزاویه‌ای در هذلولی متساوی‌القطرین محاط باشد،ارتفاع وارد بروترآن برهذلولی مماس است.

۲۳ ـ اولا ـ ثابت‌کنید مواقع عمودهایی‌که از یك نقطهٔ واقع بردایرهٔ محیطی یك مثلث برسه‌ضلع ایـن مثلث فرودآیند، بریك خط راست واقعند؛ و بعکس، اگر مواقع عمودهایی کـه از یك نقطهٔ M بر سه‌ضلع مثلثی فرود می‌آیند بریك خط راست واقع باشند، نقطهٔ M بر دایرهٔ محیطی این مثلث قرار دارد.

ثانیاً ـ ثابت کنید اگر اضلاع مثلثی بـریك سهمی مماس باشند، دایـره محیطی مثلث از کانون سهمی می گذرد و محل همرسی ارتفاعات مثلث برخط هادی سهمی واقع است .

۲۴ ـ خط d از کانون سهمی گذشته و منحنی را در دو نقطهٔ A و B قطع کـرده است، ثابت کنید $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB}$ مقدار ثابت دارد.

۲۵ ـ ثابت‌کنید که حاصل ضرب فواصل دوکانون بیضی (یاهذلولی) ازخط مماس برآن، مقداری ثابت ومساوی با b^2 است.

---

[1] ـ این مسئله که حل‌آن با استفاده ازخواص کانونی خط مماس صورت می‌گیرد، ازپونسله (Poncelet) هندسه‌دان بزرگ فرانسوی‌است، و ازاین‌رو به‌نام «قضیهٔ پونسله» معروف‌است.

